Тема 4. Дискретные и непрерывные распределения

4.1. Дискретные распределения

В классической вероятностной модели с равновероятными исходами любая случайная величина принимает лишь конечное число значений ввиду конечности пространства Ω. В общей вероятностной модели случайные величины могут иметь бесконечно много значений. Если множество значений является конечным или счётным, то случайная величина называется *дискретной*. (Случайные величины с несчётным множеством значений обсуждаются в разделе 4.2.)

Рассмотрим простой пример случайной величины со счётным множеством значений. Представим, что игральную кость (кубик) бросают до первого выпадения 1. Обозначим через L количество потребовавшихся бросаний. Вычислим вероятности $p_i = \mathbf{P}(L=i)$, $i=1, 2, \ldots$. Бросание кости описывается бесконечной последовательностью $\omega = (i_1, i_2, \ldots)$, где i_n — это выпавшая цифра (от 1 до 6) при n-м бросании кости. Аналогично решению задачи о ключах (см. раздел 3.1) для $n \geq i$ вычисляем:

$$p_i = 5^{i-1} \cdot 1 \cdot 6^{n-i} / 6^n = 5^{i-1} / 6^i = (5/6)^{i-1} (1/6).$$

Теперь давайте немного обобщим рассмотренный пример.

Геометрическое распределение. Представим, что в урне находятся m занумерованных шаров. Пусть шары с номерами 1, 2, … , l имеют белый цвет, а остальные шары — чёрный. Шары извлекают наудачу с возвращением. Появление белого шара назовём «успехом», чёрного — «неудачей». Определим случайную величину L как *число извлечений до первого* «*успеха*» (включительно). Она может принимать счётное множество значений: 1, 2, … . Найдём распределение этой случайной величины, т. е. подсчитаем вероятности $p_i = \mathbf{P}(L=i)$, $i=1, 2, \ldots$.

Выбор шаров описывается бесконечной последовательностью $\omega = (i_1, i_2, \ldots)$, где i_n — это номер шара (от 1 до m) при n-м извлечении. Аналогично решению задачи о ключах для $n \geq i$ получаем:

$$p_i = (m-l)^{i-1} \cdot l \cdot m^{n-i} / m^n = (1 - l/m)^{i-1} (l/m) = (1-p)^{i-1} p, \tag{1}$$

где $i = 1, 2, \ldots$, $p = l/m$ — доля белых шаров в урне.

Вопрос 1. Как доказать, что сумма всех вероятностей p_i, заданных формулой (1), равна 1?

Вероятности p_i образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1-p$. Поэтому набор пар (i, p_i) называется ***геометрическим распределением.***

Теперь познакомимся с дискретными случайными величинами со счётным множеством значений, которые заданы на пространстве элементарных событий $\Omega = [0,1]$. Рассмотрим произвольную последовательность, состоящую действительных чисел $p_i > 0$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. (Например, годится последовательность $p_0 = 1/2$, $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/8, \ldots$.)

Положим $r_i = p_0 + \ldots + p_i$, $r_{-1} = 0$. Рассмотрим промежутки $\mathrm{A}_i = [r_{i-1}, r_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и определим кусочно-постоянную функцию $N(\omega)$ следующим образом: пусть на промежутке A_i функция $N(\omega)$ равна i. Доопределим функцию $N(\omega)$ в точке $\omega = 1$ нулём, т. е. положим $N(1) = 0$.

График функции $y = N(\omega)$, состоящий из счётного числа ступенек, изображён на рис. 1. Согласно построению случайная величина N принимает значения $i = 0, 1, 2, \ldots$ с соответствующими вероятностями $r_i - r_{i-1} = p_i$.

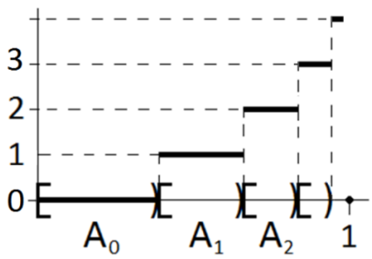

Рис. 1

В качестве частного случая рассмотрим *пуассоновскую*[1] *случайную величину*, для которой вероятности p_i задаются формулой

$$p_i = \mathbf{P}(N = i) = \lambda^i e^{-\lambda} / i!, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где параметр $\lambda > 0$. Набор пар (i, p_i) называется ***распределением Пуассона***.

Вопрос 2. Как доказать, что сумма всех вероятностей p_i, заданных формулой (2), равна 1?

При вычислении математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины, имеющей счётное множество значений, используются те же самые формулы (5) и (7) из темы 2, только вместо подсчёта конечной суммы придётся найти сумму ряда.

Вопрос 3. Чему равно математическое ожидание пуассоновской случайной величины N?

4.2. Функции распределения и плотности

Вероятностные модели применяются также и для описания экспериментов, результатами которых являются действительные числа из некоторого диапазона (рис. 2).

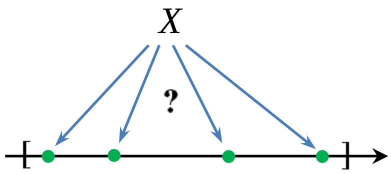

Рис. 2

Рулетка. Представим, что вокруг оси вращается с малым трением стрелка, конец которой описывает окружность длины 1 (рис. 3). Стрелку раскрутили и дождались момента, когда она остановилась. Пусть Y — длина дуги с началом в 0, на концевую точку которой указала остановившаяся стрелка.

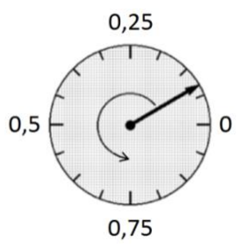

Рис. 3

[1] Симеон Дени Пуассон (1781-1840) — французский математик, механик и физик. Опубликовал более 300 научных работ.

Теоретически эту длину можно измерить с любой точностью. Иначе говоря, случайная величина Y может принимать произвольные действительные значения из отрезка $[0,1]$.

Важнейшей характеристикой произвольной случайной величины X, принимающей несчётное множество значений, служит её функция распределения.

Определение. Функцией распределения случайной величины $X(\omega)$ называется

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{\omega\colon X(\omega) \le x\}, \tag{3}$$

где аргумент x «пробегает» все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Например, на рис. 4 изображён график случайной величины — некоторой функции $X(\omega)$, заданной своим графиком на пространстве $\Omega = [0,1]$ (ω выбирается наудачу). Для фиксированного значения переменной x множество $\{\omega\colon X(\omega) \le x\}$ заштриховано, $F_X(x)$ — длина этого множества.

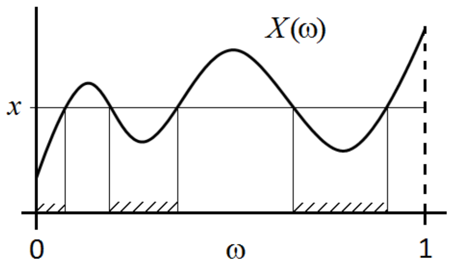

Рис. 4

Свойства функции распределения

1) $F_X(x)$ — неубывающая функция (с увеличением x множество $\{\omega\colon X(\omega) \le x\}$ «раздувается»);

2) $F_X(x) \to 0$ при $x \to -\infty$ (множество $\{\omega\colon X(\omega) \le x\}$ стягивается к пустому множеству);

3) $F_X(x) \to 1$ при $x \to +\infty$ (множество $\{\omega\colon X(\omega) \le x\}$ растягивается до всего Ω).

Свойства 2 и 3 выполняются в силу свойств непрерывности вероятности.

С помощью функции распределения $F_X(x)$ можно вычислить вероятность попадания случайной величины X в произвольный промежуток $(a,b]$ на числовой прямой (рис. 5):

$$\mathbf{P}(a < X \le b) = \mathbf{P}(X \le b) - \mathbf{P}(X \le a) = F_X(b) - F_X(a). \tag{4}$$

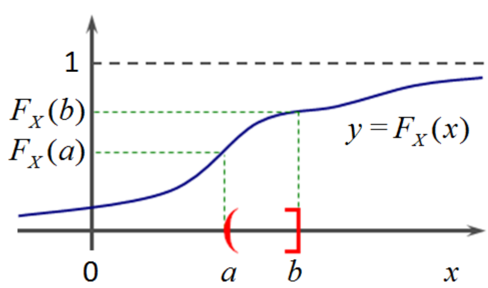

Рис. 5

Формула (4) даёт определённое количественное описание случайности. Если исследователь пришёл к выводу, что результат эксперимента (действительное число X) с вероятностью 0,999 попадает, скажем, в интервал (30, 70), то эту информацию обычно удаётся использовать на практике.

Рассмотрим два примера случайных величин с несчётным множеством значений.

Равномерное распределение на $[0,1]$. Положим $Y(\omega)=\omega$ — координата точки, взятой наудачу из отрезка $[0,1]$. Тогда функция распределения случайной величины Y имеет вид

$$F_Y(x)=\mathbf{P}(Y\le x)=\mathbf{P}(\omega\le x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ x, & \text{если } 0<x<1;\\ 1, & \text{если } x\ge 1.\end{cases}$$

Случайную величину Y также называют *равномерно распределённой на отрезке* $[0,1]$. Это название объясняется тем, что значение случайной величины Y попадает промежуток $(a,b]$, где $0<a<b<1$, с вероятностью $(b-a)$ независимо от положения промежутка внутри отрезка $[0,1]$. Действительно,

$$\mathbf{P}(a<Y\le b)=F_Y(b)-F_Y(a)=b-a.$$

Показательный (экспоненциальный) закон. Случайная величина T называется *показательной* (*экспоненциальной*) с параметром $\lambda>0$, если её функция распределения задаётся формулой

$$F_T(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

Вопрос 4. Как выглядит график этой функции?

Показательная модель часто используется для описания времени работы прибора до поломки. Случайную величину с показательным распределением можно получить из равномерно распределённой на отрезке $[0,1]$ случайной величины Y с помощью нелинейного преобразования

$$T=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y).$$

Вопрос 5. Как это доказать?

Заметим, что функции распределения равномерного и показательного законов не имеют разрывов. Такие распределения называются ***непрерывными***. Как правило, непрерывные распределения удобнее задавать не с помощью функций распределения, а через плотности.

Определение. Если для произвольных действительных чисел $a<b$ для некоторой функции $f_X(x)\ge 0$ выполняется представление

$$\mathrm{P}(a\le X\le b)=\int_a^b f_X(x)\,dx,$$

то говорят, что случайная величина X имеет *плотность распределения* $f_X(x)$ (рис. 6). Слово «распределения» часто опускают ради краткости и говорят, что X имеет плотность $f_X(x)$.

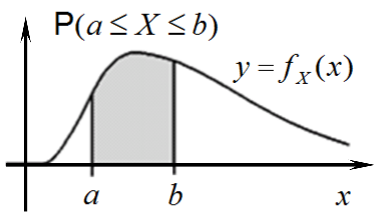

Рис. 6

Если плотность существует, то она является производной функции распределения:

$$f_X(x) = F'_X(x).$$

Обратно, зная плотность $f_X(x)$, можно найти функцию распределения $F_X(x)$, вычислив интеграл:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy.$$

Вопрос 6. Какой формулой задаются плотности и как выглядят графики плотностей равномерного распределения на $[0,1]$ и показательного распределения с параметром λ?

Отметим, что у дискретных случайных величин функция распределения разрывна (см. задачу 3 ниже), и плотности не существует.

4.3. Математическое ожидание и дисперсия в непрерывном случае

Определение. Для случайной величины X с плотностью $f_X(x)$ математическое ожидание $\mathrm{M}X$ определяется формулой

$$\mathrm{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx. \tag{5}$$

Вопрос 7. Чему равно $\mathrm{M}Y$ для равномерно распределённой на $[0,1]$ случайной величины Y?

Механическая аналогия. Как вычисляется в механике центр масс, если масса распределена непрерывно? Для примера рассмотрим стержень переменного радиуса, скажем, ствол спиленного дерева без верхушки и сучьев (рис. 7).

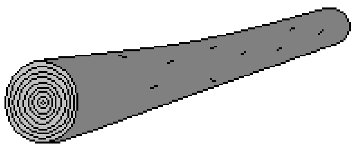

Рис. 7

Чтобы найти центр масс, мысленно распилим ствол на очень тонкие слои толщиной Δ. Масса i-го (почти цилиндрического) слоя, расположенного в точке с координатой $x_i = \Delta i$, приближённо равна

$$m_i = \pi R^2(x_i)\rho\Delta,$$

где $R(x_i)$ — радиус ствола в точке с координатой x_i, ρ — плотность древесины. Вводя обозначение $f(x) = \pi R^2(x)\rho$ и учитывая, что $\Delta = x_i - x_{i-1}$, заметим, что сумма

$$\sum x_i m_i = \sum x_i f(x_i)\Delta$$

служит интегральной суммой для интеграла

$$\int x\, f(x)\,dx.$$

Аналогично, сумма масс всех цилиндров (она приближённо равна массе всего ствола)

$$\sum m_i = \sum f(x_i)\Delta$$

представляет собой интегральную сумму для интеграла $\int f(x)\,dx$. Наконец, для координаты центра масс ствола имеем формулу

$$x_{ц.м.} = \int x\, f(x)\,dx \Big/ \int f(x)\,dx, \qquad (6)$$

которая является непрерывным аналогом формулы (6) из темы 2. В теории вероятностей в роли функции $f(x)$ выступает плотность $f_X(x)$, причём $\int f_X(x)\,dx = 1$.

Контрпример (закон Коши). Отметим, что математическое ожидание может не существовать. Например, для случайной величины R, имеющей *распределение Коши*[2] с плотностью

$$f_R(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

интеграл (5) не определён, т. е. MR не существует. Это вызвано тем, что функция $f_R(x)$ так медленно убывает при $x \to \pm\infty$ (рис. 8), что интегралы $\int\limits_{-\infty}^{0} x\, f_R(x)\,dx$ и $\int\limits_{0}^{+\infty} x\, f_R(x)\,dx$ расходятся. Действительно, рассмотрим, например, второй интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} x\, f_R(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) \;-\; \ln(1+0^2)\right) = \infty.$$

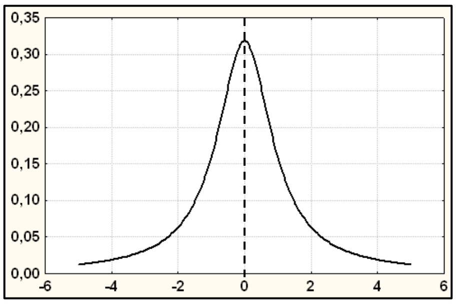

Рис. 8

Теперь обобщим на непрерывный случай полезную формулу из раздела 2.4 темы 2, применяемую для вычисления математического ожидания некоторой функции от случайной величины. Можно доказать, что верно следующее

Утверждение. Пусть случайная величина X имеет плотность $f_X(x)$. Рассмотрим случайную величину $Y = \varphi(X)$, где $\varphi(x)$ — заданная функция. Тогда

$$\text{M}Y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f_X(x)\,dx.$$

[2] Огюстен Луи Коши (1789 – 1857) — французский математик и механик. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Применив это утверждение к функции $\varphi(x)=x^2$, получим непрерывный аналог формулы для вычисления дисперсии (7) из темы 2:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{M}X^2 - (\mathrm{M}X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx \; - \; (\mathrm{M}X)^2. \tag{7}$$

Мерой «типичного разброса» значений случайной величины X относительно $\mathrm{M}X$ служит *стандартное отклонение* $\sqrt{\mathrm{D}X}$. Интервал $(\mathrm{M}X-\sqrt{\mathrm{D}X},\ \mathrm{M}X+\sqrt{\mathrm{D}X})$ обычно рассматривается в качестве *области типичных значений* случайной величины X (рис. 9).

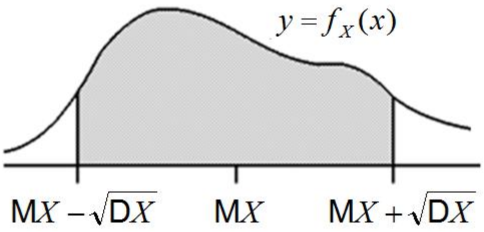

Рис. 9

Величина $c_v = 100\% \cdot \sqrt{\mathrm{D}X} \big/ \mathrm{M}X$, называемая *коэффициентом вариации*, характеризует относительную степень разброса значений случайной величины X по отношению к её среднему значению $\mathrm{M}X$. Как правило, если коэффициент вариации меньше 10%, то степень разброса считается незначительной, от 10% до 20% — средней, от 20% до 33% — значительной. При $c_v > 33\%$ распределение случайной величины X считается неоднородным.

Задачи для решения на занятии

1) Вычислить дисперсию $\mathrm{D}Y$ равномерно распределённой на отрезке $[0,1]$ случайной величины Y.

2) Случайная величина Y равномерно распределенна на отрезке [0, 1]. Найти формулы и нарисовать графики функции распределения и плотности для случайной величины: а) $U=Y^2$; б) $V=\sqrt{Y}$.

3) Построить график функции распределения $F_I(x)$ дискретной случайной величины I, имеющей распределение Бернулли: $\mathrm{P}(I=0)=1-p$, $\mathrm{P}(I=1)=p$, где $0<p<1$.

Домашнее задание

Если вторая буква вашей фамилии находится в диапазоне:
«**А – Е**», то «своими» являются задачи 4.1 и 4.5;
«**Ж – М**», то «своими» являются задачи 4.2 и 4.6;
«**Н – Р**», то «своими» являются задачи 4.3 и 4.7;
«**С – Я**», то «своими» являются задачи 4.4 и 4.8.

4.1) Случайная величина Y равномерно распределенна на отрезке [0, 1]. Положим $X=2Y-1$. Найти формулы и нарисовать графики для функции распределения $F_X(x)$ и плотности $f_X(x)$.

4.2) Вычислить дисперсию пуассоновской случайной величины N.

(*Указание*. Используйте тождество $i^2 = i(i-1) + i$ и разложение экспоненты по формуле Тейлора.)

4.3) Точка $\omega = (x, y)$ выбирается наудачу в квадрате $[0, 1]^2$. Положим $Z(\omega) = y - x.$ Найти функцию распределения и плотность случайной величины Z.

4.4) Вычислить математическое ожидание $\mathsf{M}T$ показательной случайной величины T.
(*Указание*. Интегрируйте по частям.)

4.5) Построить график функции распределения $F_{S_n}(x)$ дискретной случайной величины S_n, имеющей биномиальное распределение (см. раздел 2.2 в теме 2).

4.6) Из точки плоскости с координатами (0, 1) в случайном направлении вылетает частица.
Обозначим через X координату точки пересечения траектории частицы с осью абсцисс.
Найти функцию распределения и плотность случайной величины X.

4.7) Точка $\omega = (x, y)$ выбирается наудачу в квадрате $[0, 1]^2$. Положим $Z(\omega) = y - x.$ Найти $\mathsf{M}Z$ и $\mathsf{D}Z$.
(*Указание*. Используйте результаты решения задачи 4.3.)

4.8) Случайная величина T имеет геометрическое распределение (см. раздел 4.1). Найти $\mathsf{M}T$.
(*Указание*. Для вычисления суммы ряда S рассмотрите разность $S - qS$, где $q = 1 - p$.)