Тема 3. Общая вероятностная модель

3.1. Аксиоматика теории вероятностей

Как корректно определить вероятности на подмножествах (событиях) некоторого множества Ω, содержащего бесконечное число элементарных событий ω? (Например, для пространства $\Omega = [0,1]$, где элементарными событиями ω являются точки отрезка.) Каким образом для произвольного $\mathrm{A} \subseteq [0, 1]$ определить вероятность его наступления, т. е. вероятность попадания во множество A точки, выбираемой наудачу (совершенно случайно) из отрезка $[0, 1]$? Для события $\mathrm{A} = \omega_0$, состоящего из единственной произвольной точки $\omega_0 \in [0, 1]$, естественно считать, что $\mathbf{P}(\omega_0) = 0$. Однако, в отличие от классической модели, где $\mathbf{P}(\omega) = 1/|\Omega|$ и $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = |\mathrm{A}|/|\Omega| = \sum_{\omega \in \mathrm{A}} \mathbf{P}(\omega)$, для произвольного подмножества $\mathrm{A} \subseteq [0, 1]$ вероятность $\mathbf{P}(\mathrm{A})$ уже нельзя определять как $\sum_{\omega \in \mathrm{A}} \mathbf{P}(\omega)$. Скажем, для $\mathrm{A} = \Omega$ имеем $1 = \mathbf{P}(\Omega) \neq \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} 0 = 0$.

Прежде всего, необходимо определиться со свойствами, которым должна удовлетворять вероятностная мера (кратко — *вероятность*). Естественно потребовать выполнения для вероятностной меры следующих трёх аксиом, предложенных А. Н. Колмогоровым в 1933 году:

1) $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \geq 0$ для любого события A;
2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
3) $\mathbf{P}(\bigcup \mathrm{A}_i) = \sum \mathbf{P}(\mathrm{A}_i)$ для любых попарно непересекающихся (несовместных) событий $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$.

Третья аксиома, называемая свойством *счётной аддитивности вероятности*, наименее очевидна. Её смысл таков: если множество (*торт*) разделено на конечное или счётное число частей (*кусков*), то вероятность (*объём*) множества равна сумме вероятностей всех частей. Эта аксиома нужна для возможности перехода к пределу при вычислении вероятностей (сумма ряда есть предел).

В следующей задаче для описания эксперимента необходимо использовать пространство Ω, содержащее бесконечное число исходов ω.

Задача о ключах. У человека m ключей, из которых только один открывает дверь. Ключи пробуются наудачу и неподошедшие ключи не откладываются. Найти вероятность, что для открытия двери потребуется ровно k попыток.

Решение. Обозначим интересующее нас событие через A_k. Выясним, как устроено пространство элементарных событий. Прежде всего, отметим, что нельзя использовать параметр k при описании вероятностного пространства, так как он связан с конкретным событием, вероятность которого требуется вычислить, а не с самим экспериментом по испытанию ключей. Эксперимент состоит из многократных испытаний ключей без откладывания. Результаты этих испытаний описываются <u>бесконечной</u> последовательностью $\omega = (i_1, i_2, \ldots)$, где i_k — это номер ключа (от 1 до m), использованного при k-й попытке. Таких последовательностей бесконечно много. Как определить вероятности для подмножеств из пространства $\Omega_\infty = \{\omega\}$, в частности, для событий A_k?

Рассмотрим для $n =$ 1, 2, ... вложенные пространства $\Omega_n = \{\omega_n\}$, где $\omega_n = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Каждое из них описывает n-кратный выбор наудачу с возвращением ключей из связки с m занумерованными ключами. Для $n \geq k$ нетрудно подсчитать вероятность интересующего нас события в пространстве Ω_n:

$$\mathbf{P}_n(\mathrm{A}_k) = (m-1)^{k-1} \cdot 1 \cdot m^{n-k} / m^n = (1/m)(1 - 1/m)^{k-1}. \qquad (1)$$

Объясним эту формулу. Пусть дверь открывает ключ с номером 1. Чтобы дверь открылась в точности при k-й попытке, необходимо, чтобы при попытках с номерами от 1 до $k-1$ появлялись ключи с номерами 2, 3, …, m; при k-й попытке использовался ключ номер 1; при остальных $(n-k)$ попытках пробовались ключи с любыми номерами (предполагается, что в любом случае осуществляются все n испытаний ключей, невзирая на то, открылась дверь при k-ой попытке или не открылась).

Так как при увеличении параметра n пространства Ω_n «раздуваются», приближаясь к Ω_∞, то естественно определить $\mathbf{P}(\mathrm{A}_k)$ как $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}_n(\mathrm{A}_k)$. Но $\mathbf{P}_n(\mathrm{A}_k)$ не зависит от n согласно формуле (1). Поэтому разумно считать, что правая часть формулы (1) задаёт искомую вероятность $\mathbf{P}(\mathrm{A}_k)$ в пространстве Ω_∞.

Из решения задачи о ключах возникает идея определять вероятности произвольных событий из пространства Ω_∞ как пределы (*если они существуют*) вероятностей соответствующих событий в пространствах Ω_n (*если они там определены*). Однако более конструктивным является другой подход: не устраивать предельный переход для каждого конкретного события, а сразу определить вероятностную меру на подмножествах пространства Ω_∞. Почему такой подход предпочтительнее?

Например, рассмотрим событие

$$\mathrm{B} = \{\text{дверь откроется когда-нибудь}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k .$$

Последнее равенство в этой формуле означает, что если дверь открылась, то это случилось либо при первой попытке, либо при второй, либо при третьей, … , т. е. произошло хотя бы одно из событий A_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Заметим, что событие B <u>не принадлежит</u> ни одному из Ω_n: зная только результаты первых n испытаний ключей, нельзя сказать, появится ли $i_l = 1$ при $l > n$ в бесконечной последовательности $\omega = (i_1, i_2, \ldots)$. Тем не менее интуитивно очевидно, что в конце концов дверь непременно откроется, т. е. событие B обязательно произойдёт. Поэтому при корректном определении вероятностной меры на подмножествах пространства Ω_∞ вероятность $\mathbf{P}(\mathrm{B})$ должна быть равна 1. Убедимся в этом с помощью аксиомы счётной аддитивности вероятности. Так как события $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ несовместны (не могут произойти одновременно), то, применяя формулу (1) и формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1 - 1/m$, получаем:

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathrm{A}_k) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 1/m)^{k-1} = (1-q) \sum_{i=0}^{\infty} q^k = (1-q) \cdot \frac{1}{1-q} = 1.$$

Итак, возникает проблема, как определить вероятностную меру на подмножествах пространства Ω_∞, частности, — для множества B. К сожалению, оказалось, что вероятностную меру, удовлетворяющую трём приведённым выше аксиомам, невозможно определить <u>на всех</u> подмножествах пространства Ω_∞. Также нельзя её определить для всех подмножеств отрезка [0, 1] и для ряда других пространств, состоящих из бесконечного числа ω. Неформально говоря, причина заключается в том, что некоторые подмножества таких пространств очень сложно устроены (рис. 1).

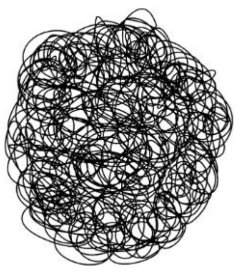

Рис. 1

Выход в том, что вероятности можно определять не для всех подмножеств пространства Ω, а лишь для достаточно широкого класса $\mathcal{A}$ подмножеств пространства Ω, которые, собственно, и называются *событиями*. Какими «естественными» свойствами должен обладать класс событий $\mathcal{A}$?

Прежде всего, он должен быть замкнут относительно операций пересечения, объединения и дополнения своих элементов (событий). Действительно, если A и B — некоторые события, то событиями также должны быть пересечение $A \cap B = \{$произошли и A, и B$\}$, объединение $A \cup B =$ $\{$случилось A или B$\}$ и дополнение $\overline{A} = \{$A не произошло$\}$. Также естественно потребовать, чтобы само пространство Ω входило в класс событий $\mathcal{A}$.

Ввиду аксиомы счётной аддитивности разумно потребовать, чтобы класс событий $\mathcal{A}$ был замкнут относительно операции счётного объединения событий: если все множества $A_1, A_2, \ldots$ принадлежат классу $\mathcal{A}$, то и их объединение $\bigcup A_i$ также обязано входить в этот класс. Таким образом, приходим к следующему набору аксиом:

Свойства класса событий ($\mathcal{A}$)

1') $\Omega \in \mathcal{A}$.

2') Если $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

3') Если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, то $\bigcup A_i \in \mathcal{A}$.

Из свойств 1′ и 2′ следует, что *пустое множество* $\varnothing \in \mathcal{A}$. Если в свойстве 3′ взять все A_i, кроме конечного числа, равными $\varnothing$, то получим замкнутость класса $\mathcal{A}$ относительно конечного объединения. Ввиду известной ***формулы Буля*** $\overline{\bigcap A_i} = \bigcup \overline{A_i}$ из свойств 2′ и 3′ выводим замкнутость класса $\mathcal{A}$ относительно конечного и счётного пересечения: если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, то $\bigcap A_i \in \mathcal{A}$.

Помимо замкнутости относительно операций дополнения, конечного и счётного пересечения или объединения своих элементов класс событий $\mathcal{A}$ должен содержать некоторые «простейшие» подмножества пространства Ω, на которых вероятность определяется естественным образом.

Например, в задаче про ключи такими подмножествами являются события, описываемые условиями на конечное число координат i_k элементарного события $\omega = (i_1, i_2, \ldots)$, т.е. подмножества, принадлежащие пространству Ω_n при некотором n. В частности, события A_k из задачи о ключах — «простейшие», а событие B — нет.

В свою очередь, для пространства $\Omega = [0,1]$ «простейшими» событиями служат интервалы (a,b), где $0 < a < b < 1$. Вероятность интервала (a,b) определяется как его длина $b-a$. При этом вероятность, что взятая наудачу из отрезка $[0,1]$ точка окажется внутри интервала заданной длины Δ, не зависит от местонахождения интервала внутри отрезка $[0,1]$ (рис. 2). Это вполне согласуется с интуитивным представлением об абсолютно случайном выборе точки.

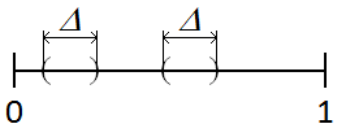

Рис. 2

Вопрос 1. Принадлежат ли классу событий на отрезке $[0,1]$: а) отрезок $[a,b]$; б) отдельная точка c?

Как устроены произвольные события? Нестрого говоря, они являются множествами, которые можно сколь угодно хорошо приблизить счётными объединениями простейших событий. В частности, события на отрезке $[0,1]$ — это множества, хорошо приближаемые счётными объединениями интервалов.

Можно доказать, что следствием вероятностных аксиом являются

Свойства непрерывности вероятности

1) Пусть события вложены и сужаются: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$. Тогда $\mathbf{P}\left(\bigcap A_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

2) Пусть события вложены и расширяются: $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$. Тогда $\mathbf{P}\left(\bigcup B_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{P}(B_i)$.

Вычисление пределов позволяет находить вероятности событий, которые представляются в виде счётных пересечений или счётных объединений вложенных событий.

Вопрос 2. Какова вероятность: а) отрезка $[a,b]$, $0 \le a < b \le 1$; б) точки c из отрезка $[0,1]$?

Казалось бы, ответы на вопрос 2 противоречат аксиоматике. Ведь отрезок $[0,1]$ — объединение своих точек, однако его мера равна 1. Дело в том, что в аксиоме 3 речь идёт о счётном объединении событий, а число всех точек на отрезке $[0,1]$ несчётно (см. дополнение в конце темы).

3.2. Геометрические вероятности

Вероятность можно определить не только для подмножеств отрезка $[0,1]$, но и для множеств, находящихся на плоскости, в трёхмерном пространстве и в n-мерном пространстве.

Если пространством Ω является единичный квадрат $[0,1]$ х $[0,1] = [0,1]^2$, т. е. элементарным событием (исходом) служит точка $\omega = (x, y)$, выбранная наудачу из $[0,1]^2$, то вероятность $\mathbf{P}(A)$ определяется как *площадь* множества A (рис. 3).

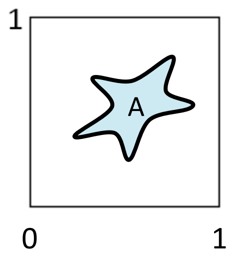

Рис. 3

Площади сложных фигур с криволинейной границей можно вычислять на основе свойства непрерывности, накрывая фигуры сеткой и уменьшая длину ребра ячейки сетки. При этом сумма площадей ячеек, оказавшихся целиком внутри фигуры, будет стремиться к площади фигуры.

Если пространством исходов Ω является единичный куб $[0,1]^3$, т. е. исходом служит $\omega = (x, y, z)$, выбранная наудачу из $[0,1]^3$, вероятность $\mathbf{P}(A)$ определяется как *объём* множества A (рис. 4).

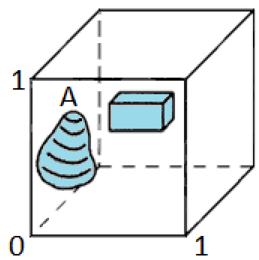

Рис. 4

Аналогично, при выборе точки $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$, вероятность $\mathbf{P}(A)$ определяется как *n-мерный объём* множества A (см. тему 7 из предыдущего курса).

Для иллюстрации некоторых проблем, связанных с корректностью подсчёта геометрических вероятностей, приведём небольшой отрывок из книги Б. В. Гнеденко «Курс теории вероятностей»:

Парадокс Бертрана. Теория геометрических вероятностей неоднократно подвергалась критике за произвольность определения вероятности событий. При этом авторы приходили к убеждению, что для бесконечного числа исходов нельзя дать объективного, не зависящего от способа расчета, определения вероятности. В качестве особенно яркого выразителя этого скептицизма можно привести французского математика прошлого века Жозефа Бертрана. В своем курсе теории вероятностей он привел ряд задач на геометрические вероятности, в которых результат зависел от метода решения. В качестве примера приведем одну из задач, рассмотренных Бертраном.

Наудачу берется хорда в круге. Чему равна вероятность того, что ее длина превосходит длину стороны вписанного равностороннего треугольника?

Решение 1. По соображениям симметрии можно заранее задать направление хорды. Проведем диаметр, перпендикулярный к этому направлению. Очевидно, что только хорды, пересекающие диаметр в промежутке от четверти до трех четвертей его длины, будут превосходить стороны правильного треугольника. Таким образом, искомая вероятность равна 1/2.

Решение 2. По соображениям симметрии можно заранее закрепить один из концов хорды на окружности. Касательная к окружности в этой точке и две стороны правильного треугольника с вершиной в этой точке образуют три угла по 60°. Условию задачи благоприятствуют только хорды, попадающие в средний угол. Таким образом, при этом способе вычисления искомая вероятность оказывается равной 1/3.

Решение 3. Чтобы определить положение хорды, достаточно задать ее середину. Чтобы хорда удовлетворяла условию задачи, необходимо, чтобы ее середина находилась внутри круга, концентрического данному, но половинного радиуса. Площадь этого круга равна одной четверти площади данного; таким образом, искомая вероятность равна 1/4.

Мы должны теперь выяснить, в чем причина неоднозначности решения нашей задачи. Лежит ли причина в принципиальной невозможности определить вероятность для случаев бесконечного числа возможных исходов или же причина лежит в том, что мы приняли в процессе решения какие-либо недопустимые предпосылки.

Дело, как легко усмотреть, заключается в том, что за решение одной и той же задачи, пользуясь тем, что в условии задачи не определено понятие проведения хорды наудачу, выдаются решения трех различных задач. В самом деле, в первом решении вдоль одного из диаметров заставляют катиться круглый цилиндрический стержень (рис. 6 *а*). Множество всех возможных мест остановки этого стержня есть множество точек отрезка AB длины, равной диаметру. Равновероятными считаются события,

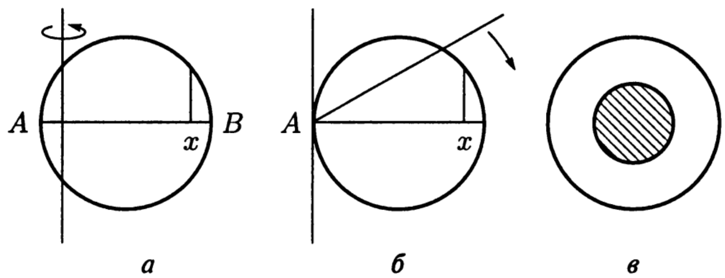

Рис. 6

состоящие в том, что остановка произойдет в интервале длины h, где бы внутри диаметра ни был расположен этот отрезок. Во втором решении стержень, закрепленный на шарнире, расположенном в одной из точек окружности, заставляют совершать колебания размером не более 180° (рис. 6 *б*). В третьем решении мы бросаем наудачу точку внутрь круга и спрашиваем себя о вероятности попадания внутрь некоторого меньшего концентрического круга (рис. 6 *в*).

Различие постановок задач во всех трех случаях совершенно очевидно.

Дополнение. Счётные и несчётные множества

Бесконечные множества бывают счётными или несчётными. *Счётными* называются такие бесконечные множества, элементы которых можно занумеровать натуральными числами. Счётными являются, например, множество всех чётных натуральных чисел или множество всех полных квадратов. Также к счётным множествам относится множество всех рациональных чисел (вида m/n) на интервале $(0,1)$. Действительно, рассмотрим числовой треугольник

$$\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/3 \quad 2/3 \\ 1/4 \quad 2/4 \quad 3/4 \\ 1/5 \quad 2/5 \quad 3/5 \quad 4/5 \\ \ldots \end{array}$$

Очевидно, он содержит любое рациональное число из интервала $(0,1)$. Занумеруем рациональные числа следующим образом: будем считывать треугольник по строкам и пропускать те числа, которые уже получили номер раньше — сократимые дроби, например, 2/4 = 1/2.

Однако множество всех чисел из интервала $(0,1)$ несчётно. Докажем это утверждение ***диагональным методом Кантора***.[1] Допустим, что удалось перенумеровать все числа из $(0,1)$. Запишем их в столбик в виде десятичных дробей (a_{ij} — j-я цифра после запятой в записи i-го числа):

$$\begin{array}{c} 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ 0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ \ldots \end{array}$$

Заметим, что некоторые числа записываются двояко. Например, 1/10 можно записать как в виде 0,1, так и в виде 0,0999… с бесконечным числом девяток:

$$0{,}0999\ldots = 9/100 + 9/1000 + \ldots = 9/100 \cdot (1 + 1/10 + 1/10^2 + \ldots) = 9/100 \cdot 1/(1 - 1/10) = 1/10.$$

Для таких чисел будем использовать запись первого вида.

Теперь построим действительное число из интервала $(0,1)$, которого нет в списке. Пусть $0,b_1b_2b_3\ldots$ — его запись в виде десятичной дроби. Построим b_i по i-й цифре после запятой i-го числа в списке следующим образом:

$$b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1, & \text{если } 0 \le a_{ii} \le 8; \\ 0, & \text{если } a_{ii} = 9. \end{cases}$$

Убедимся, что числа $0,b_1b_2b_3\ldots$ нет в списке. Действительно, оно отличается от первого числа первой цифрой, от второго числа второй цифрой и т. д. Это означает, что предположение о том, что все действительные числа из интервала $(0,1)$ можно занумеровать, неверно.

Следствием доказанного утверждения является несчётность множества всех иррациональных чисел на интервале $(0,1)$. Иначе говоря, иррациональность типична, рациональность — редкость.

---

[1] Георг Кантор (1845-1918) — немецкий математик, создатель теории множеств. Кантор впервые определил сравнение бесконечных множеств по их «мощности» через понятие взаимно-однозначного соответствия между множествами.

Задачи для решения на занятии

1) Точка $\omega = (x, y)$ взята наудачу из единичного квадрата $[0,1]^2$.
Найти: а) $\mathbf{P}(\max\{x, y\} \le 1/3)$; б) $\mathbf{P}(\min\{x, y\} \ge 1/4)$.

2) Двое договорились встретиться в определённом месте между 6 и 7 часами. Каждый из пришедших ждёт другого а) 20 минут; б) 15 минут после чего уходит. Какова вероятность, что встреча состоится? (Предполагается, что приход каждого в течение часа происходит наугад.)

3) Коэффициенты p и q квадратного уравнения
а) $x^2 + px + q = 0$; б) $px^2 + x + q = 0$
выбираются наудачу из отрезка $[0,1]$. Какова вероятность, что уравнение будет иметь действительные корни?

Домашнее задание

Если четвёртая буква вашей фамилии находится в диапазоне:
«**А – Е**», то «своими» являются задачи 3.1 и 3.5;
«**Ж – М**», то «своими» являются задачи 3.2 и 3.6;
«**Н – Р**», то «своими» являются задачи 3.3 и 3.7;
«**С – Я**», то «своими» являются задачи 3.4 и 3.8.

3.1) Две точки выбираются наудачу из [0, 1]. Какова вероятность, что из отрезков, на которые они разбивают [0, 1], можно составить треугольник? Изобразить искомое событие как фигуру из $[0,1]^2$.

3.2) Точка $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взята наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$. Найти вероятность, что наибольшая из координат x_i не превосходит числа a, где $0 < a < 1$.

3.3) Точка $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взята наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$. Найти вероятность, что наименьшая из координат x_i не превосходит числа b, где $0 < b < 1$. (*Указание*. Найдите сначала вероятность дополнения искомого события.)

3.4) Точка $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взята наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$. Определим две случайные величины: $X(\omega) = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Y(\omega) = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Найти $\mathbf{P}(X \le x, Y \le y)$ в случае: а) $0 < x < y < 1$; б) $0 < y < x < 1$. (*Указание*. Найдите сначала $\mathbf{P}(X > x, Y \le y)$.)

3.5)* Точка $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взята наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$. Обозначим через Z k-ю величину в порядке возрастания среди координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найти $\mathbf{P}(Z \le x)$, где $0 < x < 1$. (*Указание*. Найдите сначала вероятность, что число x не превосходят ровно i координат среди $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $0 \le i \le n$. Эта задача более сложная. Она имеет двойной вес. Ответ записывается в виде суммы, которую нельзя «свернуть».)

3.6) Два игрока по очереди бросают игральную кость. Выигрывает тот игрок, у кого раньше выпадет шестёрка. Какова вероятность выигрыша для игрока, бросающего кость первым? Сравнить её с 1/2.

3.7) К преподавателю для сдачи зачёта с 9 до 10 утра должны прийти 2 студента. Первому для сдачи зачёта потребуется 20 минут, второму — 10 минут. Найти вероятность, что ни одному из них не придётся ждать. (Записать ответ в виде обыкновенной дроби.)

3.8) (*Задача Бюффона*.) На плоскость, разграфлённую параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$, наудачу бросается игла длиной $2l$ $(l < a)$. Какова вероятность, что игла пересечёт одну из проведённых прямых?