Тема 2. Случайные величины в классической модели

2.1. Числа сочетаний, треугольник Паскаля, бином Ньютона

Рассмотрим множество, состоящее из n элементов. Произвольное подмножество этого множества удобно описывать в виде строки (вектора) длины n, состоящей из 0 и 1: если элемент с номером k входит в данное подмножество, то на k-м месте в строке стоит 1, иначе — 0. Скажем, запись (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0) означает, что из 9-ти элементного множества выбрано подмножество, состоящее из элементов с номерами 3, 5, 6 (рис. 1).

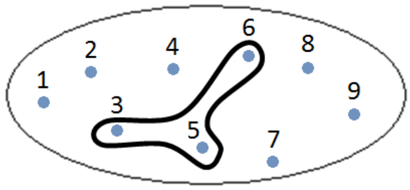

Рис. 1

Сколько всего существует разных подмножеств у n-элементного множества? Так как на каждом из n мест в записи может стоять либо 0, либо 1, то получаем, что всего разных записей 2^n. Запись, состоящая из одних единиц, соответствует самому n-элементному множеству. Запись, состоящая из одних нулей, соответствует пустому множеству, вообще не содержащему элементов.

Найдём, сколькими способами можно выбрать k-элементное подмножество из n-элементного множества, т. е. сколько имеется разных записей из 0 и 1 длины n, содержащих ровно k единиц. Выберем номера мест единиц в записи как k шаров из урны с n занумерованными шарами (выбор без возвращения). Всего существует A_n^k вариантов выбора шаров. Однако теперь нас интересует только состав выбранных номеров шаров, а не их порядок. Поэтому надо объединить все варианты, отличающиеся лишь порядком номеров. Их количество равно $k!$. Следовательно, k-элементное подмножество можно выбрать $A_n^k / k!$ разными способами.

Определение. Число $A_n^k / k!$ кратко обозначают через C_n^k и называют *числом сочетаний из n по k* (combination — (*англ.*) сочетание):

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1)$$

Вопрос 1. Из колоды, содержащей 36 карт (9 пик, 9 крестей, 9 червей, 9 бубен), извлекают наугад одновременно 4 карты. Какова вероятность, что среди них окажется:
а) хотя бы одна пиковая карта; б) хотя бы одна червовая или бубновая карта?
Выразите ответ через числа сочетаний.

Треугольник Паскаля

Для чисел сочетаний выполняются тождества:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k. \qquad (2)$$

Первое тождество очевидно из симметрии правой части формулы (1). Докажем второе тождество:

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k+1)!}(k+(n-k+1))=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=C_{n+1}^k.$$

Это тождество даёт простой метод вычисления C_n^k одного за другим. Результаты вычислений удобно объединить в таблицу (рис. 2), называемую *треугольником Паскаля*.[1]

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
. & . & & . & & . & & . & & . & & . & & . & .
\end{array}$$

Рис. 2

Каждое число в этом треугольнике получается в результате сложения двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке (пропуски по краям считаются нулями). Например, для чисел из последней строки на рис. 2 имеем:

$$1 = 0 + 1,\quad 7 = 1 + 6,\quad 21 = 6 + 15,\quad 35 = 15 + 20,\ \ldots\ , 1 = 1 + 0.$$

Другими словами, $C_7^k = C_6^{k-1} + C_6^k,\ k = 0, 1, \ldots, 7.$

Числа сочетаний C_n^k также называются *биномиальными коэффициентами* потому, что они появляются в формуле ***бинома Ньютона***

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \tag{3}$$

где считается, что $C_n^0 = 1$.

Вопрос 2. Чему равна сумма всех чисел сочетаний, находящихся в n-строке треугольника Паскаля? Сначала догадайтесь, затем докажите. (Нумерацию строк удобно начинать с 0, а не с 1.)

Вопрос 3. Чему равна сумма
а) $C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9$; б) $C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 + C_{10}^6 + C_{10}^8 + C_{10}^{10}$?
Найдите её без прямого вычисления чисел сочетаний.

2.2. Случайные величины, распределения вероятностей

Случайные величины — это функции от элементарных событий ω. Обычно их обозначают заглавными латинскими буквами (скажем, $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $\ldots$), чтобы не перепутать с переменными и параметрами, которые обозначаются строчными латинскими и греческими буквами. Случайные величины интересны тем, что над ними можно производить алгебраические операции, брать суперпозиции, задавать различные события в форме неравенств на функции от ω.

Простейшей случайной величиной является индикатор I_A некоторого события A:

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \text{если } \omega\in A,\\ 0, & \text{если } \omega\notin A.\end{cases}$$

[1] В честь Блеза Паскаля, опубликовавшего в середине XVII века «Трактат об арифметическом треугольнике». Правда, этот треугольник был известен индийским математикам ещё в X веке. Омар Хайям также исследовал его около 1100 года.

Пример 1. Напомним условия задачи 1 из темы 1: среди m экзаменационных билетов l — лёгкие, n студентов по очереди наудачу берут билеты. Допустим, что билеты выбираются с возвращением. Тогда $\omega=(i_1, i_2,\ldots,i_n)$, где i_k — номер билета (от 1 до m), выбранного k-м студентом. Здесь $|\Omega| = m^n$.

Рассмотрим события $\mathrm{A}_k = \{k$-й студент выбрал лёгкий билет$\}$, $k=1, 2, \ldots, n$. Обозначим через I_k индикатор события A_k. Подсчитаем $|\mathrm{A}_k|$. Для i_k имеется l возможностей. Для остальных компонент вектора ω нет ограничений, поэтому для каждой из них имеется m возможностей. Отсюда находим

$$\mathbf{P}(I_k=1)=\mathbf{P}(\mathrm{A}_k)=\frac{l\cdot m^{n-1}}{m^n}=\frac{l}{m}=p,$$

где p — доля лёгких билетов. Соответственно, $\mathbf{P}(I_k=0)=1-p$.

Определение. *Распределением* дискретной случайной величины $X(\omega)$ называют набор пар (x_i, p_i), где x_i — всевозможные значения, принимаемые X, $p_i=\mathbf{P}(X=x_i)$ — соответствующие вероятности.

Например, каждая из индикаторных случайных величин I_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ из примера 1 имеет одно и то же распределение:

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

Определение. Оно называется *распределением Бернулли*[2] с параметром p, где $0<p<1$.

Случайные величины $I_1, I_2, \ldots, I_n$ из примера 1 называют *испытаниями Бернулли* (*схемой Бернулли*).

Пример 2. В условиях примера 1 положим $S_n=I_1+\ldots+I_n$. Тогда S_n — общее число лёгких билетов, вынутых всеми n студентами. Для произвольного $i=0, 1, \ldots, n$ найдём вероятность события $\{S_n=i\}$. Выбрать подмножество размера i из множества, состоящего из n студентов, можно C_n^i способами. Для каждого из i студентов этого подмножества есть l вариантов выбора номера билета. Для каждого из $(n-i)$ студентов, не вошедших в это подмножество, есть $(m-l)$ вариантов выбора номера билета. Перемножая все возможности, находим

$$\mathbf{P}(S_n=i)=\frac{C_n^i l^i (m-l)^{n-i}}{m^n}=C_n^i\, p^i (1-p)^{n-i}. \tag{4}$$

Таким образом, случайная величина S_n принимает значения $i=0, 1, \ldots, n$ с соответствующими вероятностями из правой части формулы (4), т. е. она имеет следующее распределение:

x_i	0	1	$\ldots$	i	$\ldots$	n
p_i	$C_n^0\, p^0(1-p)^{n-0}=(1-p)^n$	$C_n^1\, p^1(1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^i\, p^i(1-p)^{n-i}$	$\ldots$	$C_n^n\, p^n(1-p)^{n-n}=p^n$

Определение. Из-за присутствия биномиальных коэффициентов C_n^i в выражениях для $p_i=\mathbf{P}(S_n=i)$ данное распределение называется *биномиальным.* Его изучение сыграло очень важную роль в формировании теории вероятностей как отдельного направления математики.

[2] В честь Якоба Бернулли (1654-1705), который сформулировал и доказал в книге «Искусство предположений» частный случай важнейшей теоремы теории вероятностей — закона больших чисел.

Пример 3. В урне лежат шары, занумерованные числами от 1 до m. Наудачу с возвращением извлекают n шаров с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_n$ соответственно. Положим $M(\omega) = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Учитывая, что случайная величина M принимает только целые значения от 1 до m, и используя формулу, полученную ранее в примере 6 из темы 1, находим для произвольного $i = 1, 2, \ldots, m$

$$p_i = \mathbf{P}(M = i) = \mathbf{P}(M \le i) - \mathbf{P}(M \le i-1) = \left(\frac{i}{m}\right)^n - \left(\frac{i-1}{m}\right)^n. \qquad (5)$$

Набор пар (i, p_i), где p_i заданы формулой (5), образуют распределение случайной величины M.

Отметим, что для любого распределения вероятностей выполняется равенство $\sum p_i = 1$. Оно интуитивно понятно: события $\mathrm{A}_i = \{\omega\colon X(\omega) = x_i\}$ не пересекаются и в объединении составляют всё Ω.

Вопрос 4. Какое распределение в модели повторного выбора с возвращением с $m = 2$ и $n = 3$ имеет случайная величина: а) $Y = i_1 + i_2 + i_3$; б) $Z = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3$? Составьте таблицу, содержащую x_i и p_i.

2.3. Математическое ожидание

Математическое ожидание $\mathsf{M}X$ случайной величины X является одним из основных понятий теории вероятностей. Оно выражает среднее (наиболее типичное) значение случайной величины.

Определение. $\mathsf{M}X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega).$

Согласно определению $\mathsf{M}X$ — это среднее арифметическое по всем ω из Ω значений функции $X(\omega)$.

Например, для случайной величины $Z = i_1 i_2 i_3$ из вопроса 4 вычисляем:

$$\mathsf{M}Z = (1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 + 1\cdot2\cdot1 + 1\cdot2\cdot2 + 2\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot2 + 2\cdot2\cdot1 + 2\cdot2\cdot2)/8 = 27/8.$$

Свойства математического ожидания

1) $\mathsf{M}c = c$, где c — произвольная константа;
2) $\mathsf{M}(cX) = c\mathsf{M}X$;
3) $\mathsf{M}(X+Y) = \mathsf{M}X + \mathsf{M}Y$.

Если известно распределение случайной величины X, то её математическое ожидание удобно вычислять по формуле

$$\mathsf{M}X = \sum_i x_i p_i, \qquad (6)$$

где x_i — всевозможные значения случайной величины X, $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$.

Пример 4. В эксперименте с однократным бросанием игральной кости все $p_i = 1/6$. Поэтому

$$\mathsf{M}X = (1+2+3+4+5+6)/6 = 21/6 = 3{,}5.$$

В чём удобство вычислений по формуле (6)? Сначала поясним его на житейском примере. Как опытный купец подсчитывает выручку? Первым делом он раскладывает купюры в пачки по номиналу, затем считает количество купюр в каждой пачке, умножает количество на номинал и подсчитывает сумму произведений. При таком методе подсчёта меньше вероятность ошибки, а также легче выполнить контрольный пересчёт выручки.

Вернёмся к теории вероятностей. Если известно распределение случайной величины X, то уже подсчитаны доли p_i (удельные веса) всех «множеств уровня» $\{X = x_i\}$ этой случайной величины (выполнен «подсчёт купюр в пачках»). Остаётся только вычислить сумму произведений $x_i p_i$.

Полезно познакомиться с механическим аналогом математического ожидания — центром масс.

Вопрос по механике. Штангист по ошибке поставил на штангу диски неодинаковой массы: слева диск массы m_1, а справа — диск массы m_2 (рис. 3). Если поднимать штангу одной рукой, то в какой точке (очень лёгкого) грифа надо её держать, чтобы штанга находилась в равновесии?

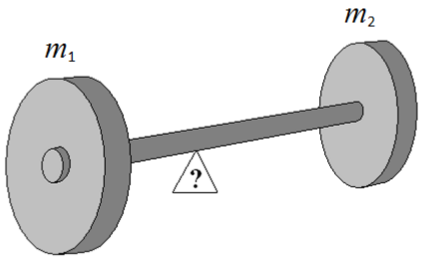

Рис. 3

Ответ. Пусть d — длина грифа. Тогда центр масс штанги (без учёта веса самого грифа) находится от левого диска приблизительно на расстоянии

$$x_{ц.м.} = (0 \cdot m_1 + d \cdot m_2) / (m_1 + m_2) = d m_2 / (m_1 + m_2).$$

В общем случае, когда на невесомой спице в точках с координатами $x_1, x_2, \dots$ закреплены грузики с массами $m_1, m_2, \dots$ соответственно, координата центра масс всей системы грузиков вычисляется по формуле

$$x_{ц.м.} = \sum x_i m_i \Big/ \sum m_i.$$

В теории вероятностей аналогами масс грузиков m_i служат вероятности p_i, причём $\sum p_i = 1$. Таким образом, математическое ожидание — это центр вероятностных масс.

Пример 5. Вычислим математическое ожидание индикатора I_{A} события A. Пусть $p = \mathbf{P}(\mathrm{A})$. Тогда

$$\mathrm{M} I_{\mathrm{A}} = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Вопрос 5. Каково математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании:
а) трёх игральных костей; б) четырех игральных костей? Запишите ответ в виде числа, а не суммы.

2.4. Дисперсия

Выведем полезную формулу для вычисления математического ожидания некоторой функции от случайной величины.

Утверждение. Пусть $Y = \varphi(X)$, где $\varphi(x)$ — заданная функция; $\mathrm{A}_i = \{\omega\colon X(\omega) = x_i\}$; $p_i = \mathbf{P}(\mathrm{A}_i)$. Тогда

$$\mathrm{M}Y = \sum_i \varphi(x_i) p_i. \tag{7}$$

Доказательство: $\mathrm{M}Y = \dfrac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|} \sum_i \sum_{\omega \in \mathrm{A}_i} \varphi(x_i) = \dfrac{1}{|\Omega|} \sum_i \varphi(x_i) |\mathrm{A}_i| = \sum_i \varphi(x_i) p_i.$

Пример 6. Пусть X — число очков, выпадающее на игральной кости, $\varphi(x)=x^3$. Согласно формуле (7)

$$\mathrm{M}Y=\mathrm{M}X^3=(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3)/6=441/6=73{,}5.$$

Рассмотрим важный частный случай формулы (7) для функции $\varphi(x)=(x-\mathrm{M}X)^2$.

Определение. *Дисперсия* $\mathrm{D}X$ случайной величины X задаётся следующей формулой:

$$\mathrm{D}X=\mathrm{M}(X-\mathrm{M}X)^2=\sum_i (x_i-\mathrm{M}X)^2 p_i. \tag{8}$$

Дисперсия характеризует степень «разброса» распределения относительно его центра — математического ожидания $\mathrm{M}X$. Для вычисления дисперсии удобно использовать формулу

$$\mathrm{D}X=\mathrm{M}X^2-(\mathrm{M}X)^2=\sum_i x_i^2 p_i-(\mathrm{M}X)^2. \tag{9}$$

Доказательство. Сначала раскроем квадрат в формуле (8), затем воспользуемся свойствами математического ожидания:

$$\mathrm{M}(X-\mathrm{M}X)^2=\mathrm{M}(X^2-2X\cdot\mathrm{M}X+(\mathrm{M}X)^2)=\mathrm{M}X^2-2\cdot\mathrm{M}X\cdot\mathrm{M}X+(\mathrm{M}X)^2=\mathrm{M}X^2-(\mathrm{M}X)^2.$$

Пример 7. Вычислим дисперсию индикатора I_{A} произвольного события A. Положим $p=\mathbf{P}(\mathrm{A})$. Ранее в примере 5 было установлено, что $\mathrm{M}I_{\mathrm{A}}=p$. Применяя формулу (9), находим:

$$\mathrm{D}I_{\mathrm{A}}=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p-p^2=p(1-p).$$

Свойства дисперсии

1) $\mathrm{D}c=0$, где c — произвольная константа.
2) $\mathrm{D}(X+c)=\mathrm{D}X$.
3) $\mathrm{D}(cX)=c^2\mathrm{D}X$.

Так же, как и для математического ожидания, в механике существует аналог дисперсии, называемый моментом инерции относительно центра масс.

Вопрос по механике. На тонком стержне (числовой прямой) в точках с координатами x_i находятся массы m_i (рис. 4). Где следует выбрать точку a крепления стержня к вертикальной оси, чтобы минимизировать *момент инерции* относительно неё, определяемый формулой $I(a)=\sum(x_i-a)^2 m_i$?

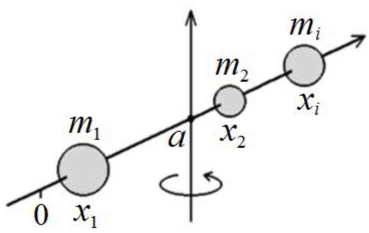

Рис. 4

Ответ. Рассмотрим дискретную случайную величину X с распределением (x_i, p_i), где $p_i = m_i \big/ \sum m_i$. Тогда для случайной величины $Y = X - a$ ввиду формулы (9) и свойства 2 дисперсии имеем:

$$I(a) \Big/ \sum m_i = \sum (x_i - a)^2 p_i = \mathsf{M}(X-a)^2 = \mathsf{D}(X-a) + (\mathsf{M}(X-a))^2 = \mathsf{D}X + (\mathsf{M}X - a)^2.$$

Наименьшее значение правой части достигается при

$$a = \mathsf{M}X = \sum x_i p_i = \sum x_i m_i \Big/ \sum m_i = x_{ц.м.}.$$

Вероятностным аналогом момента инерции относительно центра масс $I(x_{ц.м.})$ служит $\mathsf{D}X$.

Отметим также, что в англоязычной литературе для математического ожидания и дисперсии используются обозначения $\mathsf{E}X$ и $\mathsf{Var}\,X$ от английских терминов expectation и variance.

2.5. Энтропия

Функция $\varphi(x) = \log_2 x$, называемая *логарифмом по основанию* 2, определяется формулой

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Определение. *Энтропией* набора вероятностей $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_1 + \ldots + p_n = 1$, называется

$$H(\boldsymbol{p}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i.$$

Здесь считается, что $0 \cdot \log_2 0 = 0$.

Отметим, что, в отличие от математического ожидания и дисперсии, энтропия $H(\boldsymbol{p})$ не зависит от значений x_i случайной величины, а связана исключительно с набором вероятностей $\boldsymbol{p}$.

Энтропия $H(\boldsymbol{p})$ измеряет степень неопределённости (хаотичности) результата опыта, в котором разные исходы случаются с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Наиболее непредсказуемым, очевидно, является результат опыта с равновероятными исходами: $p_1 = \ldots = p_n = 1/n$. Можно доказать, что в этом случае энтропия достигает своего максимума $\log_2 n$. Напротив, если какая-то из вероятностей p_i равна 1, то результат опыта полностью определён. При этом $H(\boldsymbol{p}) = 0$.

Поскольку $p_1 + \ldots + p_n = 1$, энтропия на самом деле является функцией от $(n-1)$ переменной, скажем, от переменных $p_1, \ldots, p_{n-1}$.

Вопрос 6. Чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \log_2 \dfrac{1}{n}$?

Вопрос 7. Чему равен градиент функции $H(p_1, \ldots, p_{n-1})$ в точке $(1/n, \ldots, 1/n)$?
(Сначала догадайтесь, затем проверьте.)

Понятие энтропии играет важную роль в теории кодирования информации и статистической механике. Сам термин был введён Рудольфом Клаузиусом в 1865 году в качестве меры «хаоса» термодинамической системы. Приведём небольшой отрывок из книги Секей Г. «Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике» (с. 138):

«Проблема обратимости-необратимости — это интересный парадокс классической механики и термодинамики. Суть проблемы заключается в том, что законы классической механики обратимы и поэтому не могут объяснить, почему кусок сахара растворяется в чашке кофе, но мы никогда не наблюдаем обратный процесс. Необратимость нашего мира отражает второй закон термодинамики, впервые сформулированный Л. С. Карно (первый закон термодинамики — это закон сохранения энергии). Спустя сорок лет Р. Клаузиус ввел математическое понятие энтропии, ставшее основным в теории необратимых процессов. (Согласно Клаузиусу слово «энтропия» происходит от греческого $\tau\rho o\pi\eta$, означающего «поворот», «превращение». Клаузиус утверждает, что он добавил «эн», чтобы слово звучало аналогично «энергии».) Используя понятие энтропии, второй закон термодинамики можно сформулировать следующим образом: в изолированной системе энтропия не может уменьшиться, обычно она возрастает. Л. Больцман пытался проверить этот закон с помощью кинематики атомов и молекул. Он показал, что необратимость не противоречит обратимой механике Ньютона: применение последней к большому числу частиц с необходимостью приведет к необратимости, так как системы, состоящие из миллионов молекул, стремятся перейти в состояние, имеющее бо́льшую термодинамическую вероятность. Это и есть «основная причина» распада, износа, старения (и, как утверждают некоторые, упадка нравов или цивилизации)».

Домашнее задание

Если третья буква фамилии находится в диапазоне:

«**А** – **Е**», то «своими» являются задачи 2.1 и 2.5;
«**Ж** – **М**», то «своими» являются задачи 2.2 и 2.6;
«**Н** – **Р**», то «своими» являются задачи 2.3 и 2.7;
«**С** – **Я**», то «своими» являются задачи 2.4 и 2.8.

Решать надо ТОЛЬКО «свои» задачи! Если задача содержит пункты а) и б), то только «свой» пункт.

2.1) Из n лотерейных билетов k являются выигрышными ($n > 2k$). Найти вероятность, что среди k купленных билетов по крайней мере один выигрышный? Записать ответ через числа сочетаний.

2.2) Из чисел 1, 2, …, 100 наугад выбираются 80 чисел. Найти вероятность, что из выбранных чисел: наименьшим будет 4, а наибольшим — 90. Записать ответ через числа сочетаний.

2.3) S_n — число белых шаров при выборе наудачу без возвращения n шаров из урны с l белыми и $(m - l)$ чёрными шарами. Найти распределение случайной величины S_n. (Выразить $\mathbf{P}(S_n = i)$ через числа сочетаний.)

2.4) Для случайной величины X найти минимум по переменной a функции $g(a) = \mathsf{M}(X - a)^2$.
(*Указание*. Возведите в квадрат и используйте свойства математического ожидания.)

2.5) Вычислить дисперсию $\mathsf{D}S_n$ случайной величины S_n, имеющей биномиальное распределение (4), с помощью формулы (9). (*Указание*. Используйте тождество $i^2 = i(i-1) + i$ и метод, применённый выше при решении задачи 2.)

2.6) Написаны n писем, предназначенных разным адресатам. Имеется n конвертов с соответствующими адресами. Письма в случайном порядке вложены в конверты. Найти математическое ожидание числа писем, посланных тем адресатам, которым они предназначены.

2.7) Число X выбирается наугад из чисел 1, 2, … , n. Вычислить $\mathsf{D}X$ (ответ не должен содержать сумму). (*Указание*. Используйте математическую индукцию.)

2.8) S_n — число белых шаров при выборе наудачу без возвращения n шаров из урны с l белыми и $(m - l)$ чёрными шарами. Найти $\mathsf{M}S_n$ (ответ не должен содержать сумму). (*Указание*. Используйте представление S_n через индикаторы и свойство 3 математического ожидания.)