Тема 1. Комбинаторика

1.1. Классическая вероятностная модель

Определим ряд понятий классической вероятностной модели с равновозможными исходами. *Элементарное событие* ω описывает исход эксперимента с непредсказуемым результатом. Множество Ω, состоящее из всевозможных ω, называется *пространством элементарных событий*. В классической модели любое подмножество A множества Ω называется (просто) *событием* (рис. 1).

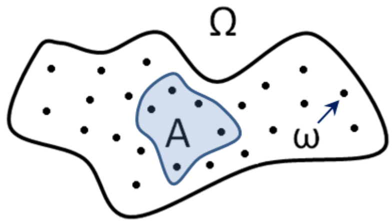

Рис. 1

Вероятность события A, обозначаемая через **P**(A), определяется как отношение числа исходов, входящих во множество A (*благоприятных исходов*), к общему числу исходов в пространстве Ω:

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}.$$

Вычисление **P**(A) сводится к подсчету $|\mathrm{A}|$, который осуществляется комбинаторными методами.

В частности, каждое элементарное событие ω имеет вероятность $\mathbf{P}(\omega) = 1/|\Omega|$, т. е. все исходы равновозможны.

Дополнением к событию A называется множество $\overline{\mathrm{A}}$, состоящее из исходов, не вошедших в A. Согласно определению вероятности верно равенство

$$\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{|\Omega| - |\mathrm{A}|}{|\Omega|} = 1 - \mathbf{P}(\mathrm{A}).$$

Пример 1. В шляпе лежат 9 бумажек с надписями 1, 2, … , 9. Наудачу вынимают одну из бумажек. Какова вероятность, что число на вынутой бумажке будет нацело делиться на 3 или на 4?

Здесь ω — число от 1 до 9, Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {3, 4, 6, 8, 9}, **P**(A) = |A| / |Ω| = 5/9.

Пример 2. Одновременно бросают 2 игральные кости (кубика). С какой вероятностью 6 очков выпадет хотя бы на одной из костей?

Здесь ω = (i, j), где i и j — числа от 1 до 6. Число всевозможных исходов $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$ (рис 2).

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Рис. 2

Из рисунка видим, что имеется ровно 11 исходов, содержащихся в событии A, поэтому **P**(A) = 11/36.

Вопрос 1. Какова вероятность в эксперименте из примера 2, что сумма выпавших очков окажется: а) меньше или равна 5; б) больше или равна 10?

Пример 3. В шляпе лежат m бумажек с надписями 1, 2, …, m. Наудачу вынимают одну из бумажек, смотрят на число и возвращают обратно. Затем бумажки перемешивают и берут ещё одну бумажку.

Вопрос 2.
Какова вероятность, что сумма чисел на двух вынутых бумажках окажется:
а) не больше $(m + 1)$; б) равна m? Также найдите предел этой вероятности при $m \to \infty$.

Пример 4. Игральную кость бросают 4 раза. Здесь исход $\omega = (i_1, i_2, i_3, i_4)$, где $1 \le i_k \le 6$. $|\Omega| = 6^4 = 1296$.

Вопрос 3. Какова вероятность, что выпадет: а) одна 6 и три 5; б) две 6 и две 5; в) ровно одна 6?
Вопрос 4. Какова вероятность, что:
а) все 4 цифры разные; б) есть хотя бы одна 6 (*Указание*. Сначала найдите $\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}})$.); в) ровно две 6?

1.2. Повторный выбор наудачу с возвращением

В урне лежат шары, занумерованные числами от 1 до m. Наудачу <u>*с возвращением*</u> извлекают n шаров с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_n$ соответственно (рис. 3).

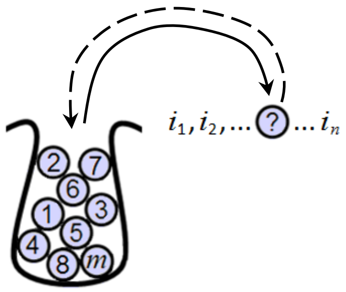

Рис. 3

Пространство Ω состоит из всевозможных наборов длины n из первых m натуральных чисел, среди которых возможны повторения: $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Очевидно, что $|\Omega| = m^n$.

Пример 5. Рассмотрим событие A = {при последнем извлечении был вынут шар с номером 1}. Тогда исходы, входящие во множество A, имеют вид $\omega = (i_1, \ldots, i_{n-1}, 1)$, где компоненты $i_1, \ldots, i_{n-1}$ могут принимать любые значения от 1 до m. Поэтому $|\mathrm{A}| = m^{n-1}$. Отсюда $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = m^{n-1}/m^n = 1/m$.

Пример 6. Пусть M — наибольший из номеров вынутых шаров, т. е. $M(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Найдём $\mathbf{P}(M \le k)$, где параметр $k = 1, 2, \ldots, m$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}(M \le k) = \mathbf{P}(i_1 \le k,\, i_2 \le k,\, \ldots,\, i_n \le k) = k^n / m^n = (k/m)^n.$$

Вопрос 5. Какова вероятность события: а) $\{j < M \le k\}$, где $1 \le j < k \le m$; б) $\{M = k\}$, где $1 \le k \le m$?
(*Указание*. Используйте то, что $\{M \le j\} \subset \{M \le k\}$ при $j < k$.)

1.3. Случайные перестановки

В модели перестановок пространство исходов Ω состоит из всевозможных перестановок первых n натуральных чисел: $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где i_k — числа от 1 до n без повторений. Давайте найдём $|\Omega|$. Единицу можно поставить на любое из n мест в перестановке; двойку — на любое из $(n - 1)$ мест, оставшихся после размещения единицы; тройку — на любое из $(n - 2)$ мест, оставшихся после размещения единицы и двойки, и т. д. Всего вариантов получается $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Это произведение называется *факториалом* числа n и кратко обозначается $n!$. Таким образом, $|\Omega| = n!$.

В этой модели даже для не очень больших n вычислять вероятности событий прямым перебором всех ω не получится. И компьютер не поможет. Например, для n = 15, 20, 30 имеем:

$15! \approx 1{,}31 \cdot 10^{12}$ (ноутбук «завис»),
$20! \approx 2{,}43 \cdot 10^{18}$ (суперкомпьютер «завис»),
$30! \approx 2{,}65 \cdot 10^{32}$ (нереально осуществить прямой перебор всех перестановок НИКОГДА).

Вопрос 6. Написано 3 письма и к ним подписано 3 конверта. Затем письма в случайном порядке были вложены в конверты и отправлены по почте. Какова вероятность того, что по назначению:
а) не попадёт ни одно письмо; б) попадёт ровно одно письмо?

Вопрос 7. В очередь в случайном порядке становятся 4 человека: **А**, **Б**, **В**, **Г**. Какова вероятность, что:
а) **А** будет стоять рядом с **Б** (до или после него); б) **А** будет стоять раньше **Б** и раньше **В**?

1.4. Повторный выбор наудачу без возвращения, числа размещений

В урне лежат шары, занумерованные числами от 1 до m. Наудачу <u>*без возвращения*</u> извлекаются n шаров ($n \le m$) с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_n$ соответственно. Пространство элементарных событий Ω состоит из всевозможных наборов длины n из первых m натуральных чисел без повторений: $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где i_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — различные натуральные числа от 1 до m.

Подсчитаем $|\Omega|$. Для числа i_1 есть m вариантов, для числа i_2 — $(m-1)$ вариант, … , наконец, для числа i_n — $(m-n+1)$ вариант. Комбинируя варианты, находим, что $|\Omega| = m(m-1)\ldots(m-n+1)$.

Определение. Произведение $m(m-1)\ldots(m-n+1)$ кратко обозначается через A_m^n и называется *числом размещений из m по n* (arrangement — (*англ.*) размещение). Его можно выразить через факториалы: $A_m^n = m!/(m-n)!$.

Модель случайных перестановок является частным случаем модели размещений при $m = n$.

Методика решения комбинаторных задач

Решение любой комбинаторной задачи <u>следует разделять на две части</u>:

1) Формальное описание исхода эксперимента, при котором конкретизируется, что представляет собой элементарное событие ω (обычно, ω — вектор с целочисленными компонентами). При этом описание должно быть максимально детальным, без учёта информации и параметров, характеризующих событие А (в противном случае возникают сомнения, что исходы равновероятны). Подсчёт общего числа исходов $|\Omega|$.

2) Перевод выраженных словами условий, определяющих интересующее событие А, в условия (ограничения, неравенства) на компоненты вектора ω. Подсчёт числа благоприятных исходов $|A|$.

Пример 7. Найдём вероятность, что при выборе шаров наудачу без возвращения при последнем извлечении появится шар с номером 1.

Часть 1. Здесь $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где i_k — различные натуральные числа от 1 до m, $|\Omega| = A_m^n$.
Часть 2. Исходы, образующие событие А, устроены так: $\omega = (i_1, \ldots, i_{n-1}, 1)$, где i_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ — различные натуральные числа от 2 до m. Таким образом, надо разместить $(m-1)$ различных чисел на позициях от 1 до $(n-1)$. Поэтому $|A| = A_{m-1}^{n-1}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{A_{m-1}^{n-1}}{A_m^n} = \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)} = \frac{1}{m}.$$

Ответ интуитивно ожидаем. Он совпадает с ответом из примера 5 для выбора с возвращением.

Рекомендации по решению комбинаторных задач:

1) если сомневаетесь, уточните у преподавателя, правильно ли вы поняли условие задачи;
2) необходимо чётко разделять в формулировке задачи слова, относящиеся к описанию эксперимента, и слова, определяющие событие, вероятность которого надо найти;

3) напрямую переберите все варианты для случаев, когда размерность вектора ω равна 2 или 3;
4) что-нибудь зафиксируйте (скажем, какую-нибудь компоненту вектора ω) и перейдите к подсчету в пространстве меньшей размерности.

Домашнее задание

Если первая буква фамилии находится в диапазоне:

«**А – Е**», то «своими» являются задачи 1.1 и 1.5;
«**Ж – М**», то «своими» являются задачи 1.2 и 1.6;
«**Н – Р**», то «своими» являются задачи 1.3 и 1.7;
«**С – Я**», то «своими» являются задачи 1.4 и 1.8.

Решать надо ТОЛЬКО «свои» задачи! Если задача содержит пункты а) и б), то только «свой» пункт.

1.1) Буквы в слове МИША смешали и затем выложили в случайном порядке (все перестановки букв равновероятны). Какова вероятность, что получится то же самое слово? Тот же вопрос для слов МАША и МАМА.

1.2) Найти вероятность, что взятое наугад трехзначное число записывается тремя разными цифрами.

1.3) В очередь в случайном порядке становятся n человек. Найти вероятность, что между определёнными лицами окажется ровно k человек, $k = 0, 1, \dots, n-2$.

1.4) В урне 2 белых и 3 чёрных шара. Два игрока поочерёдно вынимают шары без возвращения. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Какова вероятность, что выиграет первый игрок? (Будет засчитано только такое решение, в котором подсчитываются элементарные события ω.)

1.5) В чулане находятся 5 разных пар ботинок. Случайно выбираются 4 ботинка. Найти вероятность, что среди них найдётся хотя бы одна пара. Запишите ответ в виде несократимой дроби.

1.6) Числа X и Y выбираются наудачу с возвращением из множества $\{1, 2, \ldots, m\}$.
Найти: а) $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{P}(X^2+Y^2<m^2)$; б) $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{P}(2XY<m^2)$.

1.7) Найти вероятность p_n, что по крайней мере двое из n людей имеют одинаковый день рождения. Выразить ответ через число размещений. Вычислить на компьютере значение p_n с двумя знаками после запятой для $n = 30$ и $n = 50$. (Опишите, как вычисляли.)

1.8) В лифт 9-ти этажного дома на первом этаже вошли трое. Найти вероятность, что для их выхода лифт будет останавливаться дважды. Записать ответ в виде несократимой дроби. (*Указание*. Сначала вычислите вероятности, что лифт будет останавливаться однажды и трижды.)

Замечание. В задаче 1.8 предполагается, что каждый пользователь лифта независимо от остальных пользователей с одинаковыми вероятностями выходит на любой из возможных остановок. Так, в данном случае каждый вошедший в лифт на первом этаже с вероятностью 1/8 выходит на 2-м этаже, с вероятностью 1/8 на 3-м этаже, … , с вероятностью 1/8 на 9-м этаже.