Тема 6. Интеграл

6.1. Интеграл как площадь под графиком

Для неотрицательной функции $f(x)$ определим *интеграл*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

как площадь криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 1 слева). Другими словами, интеграл выражает объём краски, требующейся для закрашивания трапеции.

Для функции $f(x)$, принимающей значения разных знаков, определим интеграл как алгебраическую сумму *площадей со знаком*: там, где функция неотрицательна, площадь под графиком учитывается со знаком плюс; там, где функция принимает отрицательные значения, площадь над графиком берётся со знаком минус.

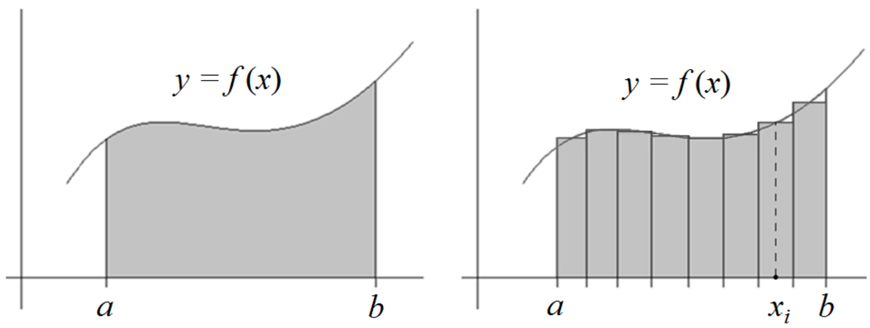

Рис. 1

Символ интеграла представляет собой вытянутую букву *S* слова *summa*. Обозначение связано с формальным определением интеграла как предела *интегральных сумм* S_n:

$$I = \lim_{n\to\infty} S_n, \tag{2}$$

где $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,d_n$, $d_n = (b-a)/n$, $x_i = a + d_n(i - 1/2)$.

Таким образом, отрезок $[a, b]$ разбивается n интервалов одинаковой длины d_n. Через x_i обозначены «узлы» — середины интервалов разбиения (рис. 1 справа). Значения функции в «узлах» $f(x_i)$, умноженные на d_n, складываются по всем i от 1 до n, образуя интегральную сумму S_n. Заметим, что S_n — это сумма площадей полосок ширины d_n с высотами $f(x_i)$. Если $n\to\infty$, то ширина полоски $d_n\to 0$, и сумма площадей полосок S_n приближается к площади I криволинейной трапеции.

Определение. Интеграл с бесконечным верхним пределом $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ (называемый *несобственным интегралом*) будем понимать как $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{n} f(x)\,dx$ (если предел существует).

Свойства интеграла

1) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,\qquad \int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$ где c — константа.

2) Если $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

Свойства 1 и 2 очевидны. Поскольку $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, из свойства 2 следует, что

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Тем самым доказано важное свойство

3) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

6.2. Первообразная, формула Ньютона — Лейбница

Проблема. Задана функция $f(x)$. Требуется найти функцию $F(x)$, производной которой служит $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Такая функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$.

Ниже будет доказано, что первообразная $F(x)$ вычисляется по функции $f(x)$ однозначно с точностью до добавления произвольной константы c. Например, первообразной для функции $f(x) = 2x$ служит $F(x) = x^2 + c$.

Для нахождения первообразных, как правило, используются таблицы. Приведём краткий список первообразных для некоторых элементарных функций.

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
x^a при $a \ne -1$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$x^{-1} = 1/x$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$
e^{-x}	$-e^{-x} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$

Однако первообразная элементарной функции (в отличие от производной) не всегда может быть выражена в виде явной формулы через элементарные функции. Например, известно, что первообразная функции $f(x) = e^{-x^2}$ через элементарные функции не выражается.

Первообразную и интеграл связывает фундаментальная
формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b. \qquad (3)$$

Формула (3) означает, что интеграл от функции по отрезку $[a, b]$ равен приращению её первообразной на этом отрезке.

Например, из приведённой выше таблицы первообразных находим, что для $f(x) = x^2$ первообразной служит функция $F(x) = x^3/3 + c$. Для $a = 0$ и $b = 1$ получим: $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

Упражнение. Вычислите интегралы: а) $\int_0^1 x^n\,dx$, где n — натуральное число; б) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, в) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$.

Упражнение. Вычислите интегралы: а) $\int_0^\infty e^{-x}dx$, б) $\int_0^1 \ln x\,dx$.

Теперь докажем, что первообразная определяется по функции однозначно с точностью до константы. Положив в формуле Ньютона — Лейбница $b = y$, где y — это переменная, принимающая произвольные действительные значения, получим соотношение

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx + F(a),$$

позволяющее однозначно (потому что интеграл, как предел, определён однозначно) при любых действительных значениях аргумента y найти по функции f значения её первообразной F с точностью до константы $F(a)$, зависящей от выбора левого конца a отрезка интегрирования. В этом смысле интегрирование является операцией обратной к дифференцированию.

Как вычислять интегралы для функций, заданных формулами? Раньше для этого использовались таблицы первообразных (также называемых *неопределёнными интегралами*). Теперь удобнее воспользоваться Интернетом, например, online-программой на сайте **math24.biz/integral** (там же можно вычислять пределы и производные).

Тем не менее, для понимания математических текстов полезно знать некоторые приёмы интегрирования. Прежде всего,

метод интегрирования по частям, основанный на формуле

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \qquad (4)$$

Формула (4) следует из формулы Ньютона — Лейбница (3) и свойства производной 4 из темы 4.

Например, применяя формулу (4) с учётом пункта б) из предыдущего упражнения, имеем:

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x(-e^{-x})'\,dx = \lim_{n\to\infty}\left((-ne^{-n}) - (-0\cdot e^{-0}) - \int_0^n 1\cdot(-e^{-x})\,dx\right) = 0 + 0 + \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}dx = 1.$$

Упражнение. Вычислите по частям интеграл $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx.$

Дополнение. Погрешность метода прямоугольников

Методом прямоугольников называется приближенное вычисление интеграла I путём аппроксимации его интегральной суммой S_n (см. формулы (1) и (2)). Какова погрешность этого метода? Иначе говоря, насколько велико может быть абсолютное отклонение $|I - S_n|$? Получим для него оценку сверху с помощью формулы Тейлора.

Утверждение. Для дважды дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ верна оценка

$$|I - S_n| \le \frac{M(b-a)^3}{24n^2}, \quad \text{где } M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|. \tag{5}$$

Таким образом, для гладких функций погрешность метода прямоугольников имеет порядок малости не более $const/n^2$.

Доказательство. Напомним, что в формуле (2) были введены обозначения $d_n = (b-a)/n$, $x_i = a + d_n(i - 1/2)$. Положим $a_i = x_i - d_n/2,\ b_i = x_i + d_n/2.$ Для произвольного числа x из $[a_i, b_i]$ запишем разложение по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x - x_i)^2, \quad \text{где число } \xi_i \text{ принадлежит } (a_i, b_i).$$

Введём обозначение: $R_i = \int_{a_i}^{b_i} (f(x) - f(x_i))\, dx.$ Поскольку ввиду нечётности $\int_{a_i}^{b_i} f'(x_i)(x - x_i)\, dx = 0,$

$$R_i = \frac{1}{2} \int_{a_i}^{b_i} f''(\xi_i)(x - x_i)^2 dx.$$

Применяя приведённые выше свойства 1 – 3 интеграла, получаем:

$$|R_i| \le \frac{1}{2} \int_{a_i}^{b_i} |f''(\xi_i)|(x - x_i)^2 dx \le \frac{1}{2} \int_{a_i}^{b_i} M(x - x_i)^2 dx = \frac{M}{2} \int_{a_i}^{b_i} (x - x_i)^2 dx. \tag{6}$$

Первообразной для интегрируемой функции $g(x) = (x - x_i)^2$ служит функция $G(x) = (x - x_i)^3/3.$ Используя формулу Ньютона — Лейбница (3), выводим из формулы (6) оценку сверху для $|R_i|$:

$$|R_i| \le \frac{M}{2}\left(\frac{(b_i - x_i)^3}{3} - \frac{(a_i - x_i)^3}{3}\right) = \frac{M}{2}\left(\frac{(d_n/2)^3}{3} - \frac{(-d_n/2)^3}{3}\right) = \frac{M d_n^3}{24} = \frac{M(b-a)^3}{24n^3}.$$

Теперь заметим, что

$$I - S_n = \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{i=1}^n f(x_i)\, d_n = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f(x)\, dx - \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_{a_i}^{b_i} dx = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (f(x) - f(x_i))\, dx = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Для завершения доказательства осталось применить известное неравенство $\left|\sum_{i=1}^{n} R_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |R_i|$.

Упражнение. Выведите последнее неравенство из очевидного неравенства $|a+b| \le |a|+|b|$.

Упражнение. Напишите программу на языке Visual Basic для приближённого вычисления методом прямоугольников интеграла $\int_0^1 x^3\,dx$. Какую погрешность обеспечивает доказанное утверждение для $n=100$? Какова истинная погрешность?

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Найти с помощью формулы Ньютона — Лейбница интегралы:

а) $\int_{-1}^{1} \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$; б) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; в) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,dx$.

6.2. Интегрированием по частям найти интегралы:

а) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$;

б) $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$ для любого натурального числа n.

6.3*. Используя программу на языке Visual Basic для метода прямоугольников, приближённо вычислить интеграл $-\int_0^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx$.

(*Указание*. Оцените $\int_n^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx$ сверху интегралом $\int_n^{\infty} xe^{-x}dx$.)

6.4*. Используя программу на языке Visual Basic для метода прямоугольников, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ с гарантированной погрешностью 0,001.

(*Указание*. Оцените $\int_n^{\infty} e^{-x^2}dx$ сверху интегралом $\int_n^{\infty} e^{-x}dx$. Для оценки погрешности используйте неравенство (5) из дополнения. Глобальный максимум $|f''(x)|$ найдите, построив график функции $y=f''(x)$ на отрезке $[-3, 3]$.)