Тема 4. Производная

4.1. Непрерывность функции

Интуитивно ясное свойство непрерывности (отсутствия разрывов) у графика функции формально определяется (*по Гейне*) через понятие предела последовательности.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для любой числовой последовательности $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ предел последовательности $y_n = f(x_n)$ существует и равен $y_0 = f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на некотором множестве* (например, на отрезке $[a, b]$), если она непрерывна во всех точках этого множества.

Пример 1. Докажем, что линейная функция $f(x) = a + bx$, где a и b — произвольные константы, является непрерывной при всех x. Действительно, по свойствам предела из темы 2 имеем:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(a + bx_n) = \lim_{n\to\infty} a + \lim_{n\to\infty} b \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = a + bx_0 = f(x_0).$$

Пример 2. Установим, что функция $f(x) = x^2$ (графиком которой служит парабола) также непрерывна на всей числовой прямой. Для произвольного действительного числа x_0 положим $d_n = x_n - x_0$. Тогда по свойствам предела получаем, что $d_n \to 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_0 + d_n)^2 = \lim_{n\to\infty}(x_0^2 + 2x_0 d_n + d_n^2) = x_0^2 + \cdot \lim_{n\to\infty} 2x_0 \cdot \lim_{n\to\infty} d_n + \lim_{n\to\infty}(d_n \cdot d_n) =$$
$$= x_0^2 + 2x_0 \cdot 0 + \lim_{n\to\infty} d_n \cdot \lim_{n\to\infty} d_n = x_0^2 + 0 + 0 \cdot 0 = x_0^2 = f(x_0).$$

Пример 3. Проверим, что модуль $f(x) = |x|$ является непрерывной функцией при всех действительных x. При $x \neq 0$ функция модуля линейна и поэтому непрерывна. Покажем, что она непрерывна также и в точке $x_0 = 0$. Возьмём произвольную последовательность $\{d_n\}$, которая стремится к 0. Согласно определению предела для произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер n_ε, что для всех натуральных $n \geq n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|d_n| \leq \varepsilon$. Это означает, что $\lim_{n\to\infty} |d_n| = 0$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_0 + d_n) = \lim_{n\to\infty} |0 + d_n| = \lim_{n\to\infty} |d_n| = 0 = f(0)$.

Методика. Как обосновать, что определённая функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0? Следует доказать, используя определение предела, свойства пределов или принцип «двух полицейских», что для произвольной числовой последовательности $\{d_n\}$, стремящейся к 0, имеет место сходимость $y_n = f(x_0 + d_n) \to y_0 = f(x_0)$.

Как доказать, что функция имеет разрыв в точке x_0? Надо придумать <u>конкретную</u> числовую последовательность $\{d_n\}$, сходящуюся к 0 (скажем, взять $d_n = 1/n$ или $d_n = (-1)^n / n$), для которой последовательность $y_n = f(x_0 + d_n)$ <u>не сходится</u> к числу $f(x_0)$ (т. е. либо $\{y_n\}$ вообще не сходится к пределу, либо $\lim_{n\to\infty} y_n$ существует, но он не равен числу $y_0 = f(x_0)$).

Упражнение. Выяснить, какие из следующих функций являются непрерывными в точке $x_0 = 0$ (сначала нарисуйте графики функций, затем докажите формально согласно методике):

а) $\begin{cases} x/|x| & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ б) $\sqrt{|x|}$; в) $\begin{cases} 1/x & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1/(1+x) & \text{при } x \neq -1, \\ 0 & \text{при } x = -1. \end{cases}$

4.2. Мгновенная скорость

Пусть автомобиль в момент времени t_0 находился на расстоянии $s(t_0)$, а в момент времени t_1 — на расстоянии $s(t_1)$ от пункта А. За время $\Delta t = t_1 - t_0$ автомобиль проехал расстояние

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0).$$

Разделив приращение пути Δs на приращение времени Δt, получим *среднюю скорость* автомобиля за временной промежуток $[t_0, t_1]$. Чем меньше Δt, тем точнее отношение $\Delta s / \Delta t$ характеризует быстроту движения в момент t_0. Мгновенной скоростью $v(t_0)$ называется предел, к которому стремится отношение $\Delta s / \Delta t$ при стремлении Δt к нулю. Именно эту характеристику оценивает спидометр автомобиля. Дадим формальное определение мгновенной скорости, опирающееся на понятие предела числовой последовательности.

Определение. Для произвольной числовой последовательности $\{d_n\}$, удовлетворяющей условию $0 \neq d_n \to 0$ при $n \to \infty$, *мгновенной скоростью* в момент t называется

$$v(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{s(t+d_n) - s(t)}{d_n}. \quad (1)$$

Пример 4. ***Свободное падение тела.*** Согласно экспериментальным данным имеет место функциональная зависимость пути $s(t)$ свободно падающего тела от времени падения t:

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2,$$

где постоянная $g = 9{,}8 \text{ м/с}^2$.

Вычислим мгновенную скорость $v(t)$ в момент t по формуле (1):

$$v(t) = \frac{g}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(t+d_n)^2 - t^2}{d_n} = \frac{g}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(t^2 + 2td_n + d_n^2) - t^2}{d_n} = \frac{g}{2} \lim_{n\to\infty} (2t + d_n) = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Таким образом, скорость $v(t)$ линейно возрастает при увеличении времени падения t.

4.3. Определение и свойства производной

Каждой функции $f(x)$, имеющей гладкий график, можно однозначно сопоставить другую функцию, называемую *производной*. Производная функции $f(x)$ обозначается через $f'(x)$. Вычисление производной $f'(x)$ называется *дифференцированием* функции $f(x)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если для любой последовательности $\{d_n\}$, удовлетворяющей условию $0 \neq d_n \to 0$ при $n \to \infty$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+d_n) - f(x_0)}{d_n}, \quad (2)$$

который обозначается через $f'(x_0)$ и называется значением производной $f'(x)$ в точке x_0.

В частности, для пути $s(t)$ производной служит мгновенная скорость $v(t)$, т.е. $s'(t) = v(t)$.

Утверждение. Из дифференцируемости функции следует её непрерывность.

Доказательство. Поскольку предел произведения равен произведению пределов, запишем:

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_0+d_n) - f(x_0)) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+d_n) - f(x_0)}{d_n}\cdot d_n = f'(x_0)\cdot 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_0+d_n) = f(x_0).$$

Упражнение. Является ли функция $f(x)=|x|$ дифференцируемой в точке $x_0=0$?

Каков смысл производной $f'(x)$? Она характеризует скорость изменения функции $f(x)$: $f'(x)$ имеет большие положительные значения там, где функция $f(x)$ быстро возрастает; $f'(x)$ имеет большие отрицательные значения там, где функция $f(x)$ быстро убывает; $f'(x)$ принимает близкие к нулю значения там, где функция $f(x)$ изменяется медленно.

Функция $f(x)$, для которой предел в формуле (2) существует при всех x_0 из отрезка $[a, b]$, называется *дифференцируемой на* $[a, b]$. Дифференцируемость функции на отрезке $[a, b]$ можно рассматривать как формализацию представления о гладкости графика функции.

Свойства производной

Пусть c — константа, $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда

1) $c'=0$;

2) $(c\,f(x))'=c\,f'(x)$;

3) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$;

4) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

5) $(f(x)/g(x))'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Свойства 1-3 немедленно следуют из определения производной и свойств предела последовательности. Свойства 4 и 5 предлагается вывести самостоятельно в задачах 4.4 и 4.5.

Особенно важную роль в математическом анализе играет правило дифференцирования суперпозиции $f(g(x))$ (так называемой *сложной функции*):

6) $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Производные простейших функций

1) $(x^a)'=ax^{a-1}$ (здесь a — любое действительное число). В частности для $a=1$ и $a=-1$ получаем формулы

$$x'=(x^1)'=1\cdot x^0=1 \qquad \text{и} \qquad (1/x)'=(x^{-1})'=(-1)\cdot x^{-2}=-1/x^2.$$

2) $(e^x)'=e^x$;

Верно следующее утверждение: если производная функции совпадает с самой функцией, т. е. если $f'(x)=f(x)$, то функция $f(x)=ce^x$, где c — произвольная константа.

3) $(\ln x)'=1/x$;

4) $(\sin x)'=\cos x$;

5) $(\cos x)'=-\sin x$.

Упражнение. Используя свойства производной, найдите $f'(x)$ для следующих функций:

а) $f(x) = x\ln x - x$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$ (напомним, что $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ и $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$);

в) $f(x) = \sin^3 x$;

г) $f(x) = e^{-x} / x^2$.

4.4. Касательная к графику функции

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется прямая линия, к которой приближается секущая, построенная на отрезке $[x_0, x_0 + d_n]$, при $d_n \to 0$ (рис. 1). (Заметим, что касательная может, кроме точки касания, иметь с графиком другие общие точки.)

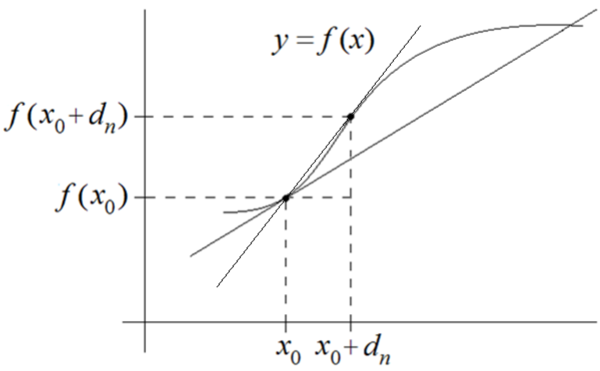

Рис. 1

Утверждение. Угловой коэффициент касательной в точке x_0 равен $f'(x_0)$.

Доказательство. Согласно определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + d_n) - f(x_0)}{d_n}. \tag{3}$$

В формуле (3) под знаком предела стоит угловой коэффициент секущей на отрезке $[x_0, x_0 + d_n]$. При $d_n \to 0$ секущая приближается к касательной, а её угловой коэффициент сходится к $f'(x_0)$.

Следствие. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, раскрывая скобки в формуле (4), видим, что эта формула задаёт прямую линию $y = ax + b$ с коэффициентами $a = f'(x_0)$ и $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Подставляя значение x_0 вместо x в правую часть формулы (4), получим, что прямая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$, имея угловой коэффициент $f'(x_0)$. Поэтому она является касательной в точке x_0.

Пример 5. Найдём уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$. Применяя первую формулу из списка производных простейших функций при $a = 2$, получим, что $f'(x) = 2x$. Поэтому угловой коэффициент в точке $x_0 = 1$ равен $f'(x_0) = 2x_0 = 2$.

Далее вычислим значение функции: $f(x_0) = x_0^2 = 1$. Согласно формуле (4) касательной к графику параболы в точке $x_0 = 1$ служит прямая линия с уравнением

$$y = 1 + 2(x-1) = 2x - 1 \text{ (рис. 2).}$$

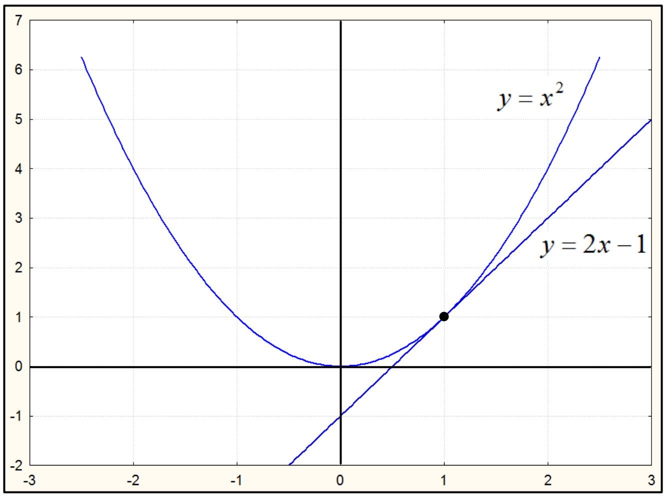

Рис. 2

Упражнение. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

4.5. Теорема Лагранжа о среднем значении

Теорема (Лагранж). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то в этом интервале найдётся такая точка ξ, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \tag{5}$$

Геометрически это можно переформулировать так: на интервале (a, b) найдётся точка ξ, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки графика, соответствующие концам отрезка (рис. 3).

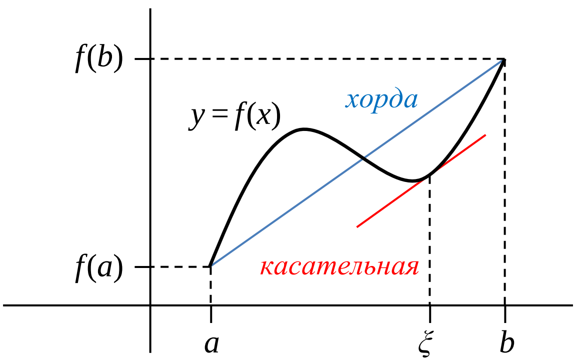

Рис. 3

Доказательство теоремы Лагранжа приведено в учебниках по математическому анализу.

Упражнение. Найдите точку ξ для функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[0, 2]$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Вычислить производные функций:

а) $f(x)=x^2/(x+1)$; б) $f(x)=\sin(\cos x)$.

4.2. Пусть $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ — дифференцируемые функции. Вывести формулы для производных следующих функций (вторая формула называется «*телескопическим правилом*»):

а) $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$; б) $f(g(h(x)))$.

(*Предупреждение*. Напишите подробное решение с пояснениями, а не только ответы!)

4.3. Найти уравнения касательных к графикам функций:

а) $y=x^2e^{-x}$ в точке $x_0=2$; б) $y=e^{-x^2}$ в точке $x_0=-1$.

4.4*. Вывести свойство 4 производной, опираясь на определение производной.
(*Указание*. Рассмотрите последовательности

$$a_n=\frac{f(x+d_n)\,-\,f(x)}{d_n}-f'(x) \quad \text{и} \quad b_n=\frac{g(x+d_n)\,-\,g(x)}{d_n}-g'(x),$$

которые стремятся к 0 при $n\to\infty$ согласно определению производных $f'(x)$ и $g'(x)$.

4.5. Доказать свойство 5 производной на основе свойств 6 и 4:
а) используя свойство 6, вывести формулу для производной $(1/g(x))'$;
б) доказать свойство 5, используя свойство 4 и пункт а).

4.6*. Выясните, является ли следующие функции непрерывными в нуле:

а) $f(x)=\begin{cases}\cos(1/x) & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$ (график этой функции изображён на рис. 4);

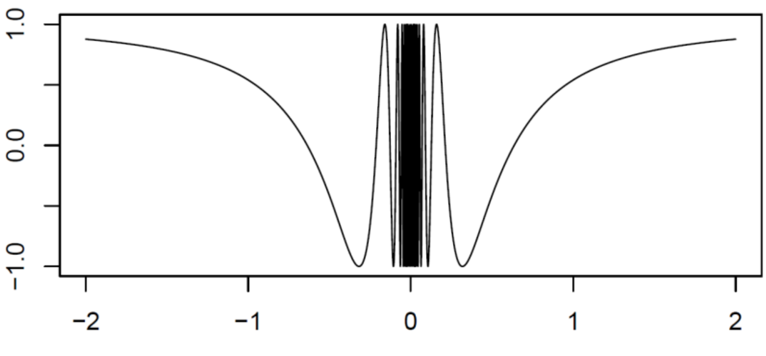

Рис. 4

б) $f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x) & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0;\end{cases}$ в) $f(x)=\begin{cases}x^2\cos(1/x) & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$

4.7*. Выясните, является ли следующие функции дифференцируемыми в нуле:

а) $f(x)=\begin{cases}x\cos(1/x) & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x^2\cos(1/x) & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$