Тема 1. Функции одной переменной

1.1. Функции и их графики

Функции применяются для описания зависимостей определённого вида между измеряемыми характеристиками (переменными). Например, представим, что автомобиль выехал по шоссе из города A в город B. Через время t автомобиль будет находиться на расстоянии r от города A. Расстояние r является функцией от времени t в том смысле, что каждому моменту времени t соответствует определённое значение расстояния r.

Функциональная зависимость переменной r от переменной t обозначается как $r(t)$. Переменная, стоящая в скобках, называется *аргументом* функции.

Функциональную зависимость можно изобразить в виде графика: по горизонтальной оси откладываются значения аргумента, по вертикальной оси откладываются значения функции, соответствующие значениям аргумента. При непрерывном изменении аргумента t точка на плоскости с координатами $(t, r(t))$ описывает кривую, которая называется *графиком функции* $r(t)$. На рис. 1 изображён один из возможных графиков функции $r(t)$.

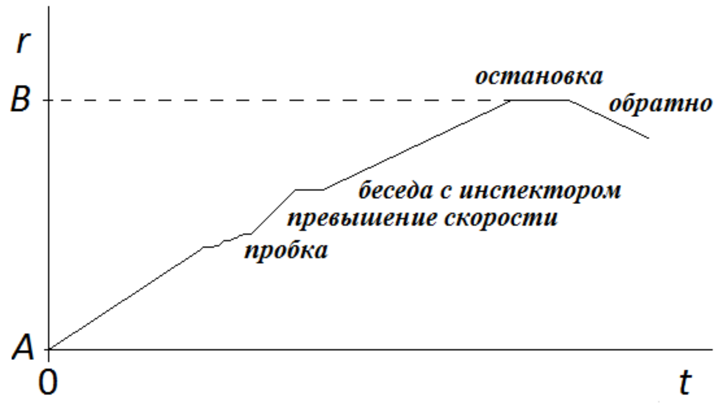

Рис. 1

Встречаются зависимости, *не являющиеся функциональными.* Например, вес человека w не определяется однозначно его ростом h. Очевидно, имеет место тенденция увеличения веса с увеличением роста, однако, она искажается под влиянием разнообразных факторов. Предположим, что у исследователя есть измерения роста и веса n человек: (h_i, w_i), $i = 1, \ldots, n$. В результате влияния факторов точки с координатами (h_i, w_i) не будут располагаться на непрерывной кривой, а образуют на плоскости «облако» из хаотично расположенных точек. Такие зависимости будут изучаться методами математической статистики в следующем году.

1.2. Функции, заданные формулой

Обычно функции задаются формулами. В таком случае функциональная зависимость переменной y от переменной x записывается в виде $y = f(x)$, где f обозначает некоторую формулу, выражающую эту зависимость. Из школьного курса известны следующие функции: линейная $(ax + b)$, квадратичная $(ax^2 + bx + c)$, тригонометрические $(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)$.

График функции, заданной формулой, несложно построить с помощью программы Excel. Для построения графика на отрезке $[A, B]$ надо выполнить следующие шаги:

1) Задать в первом столбце рабочего листа Excel «сетку» значений аргумента с некоторым достаточно малым шагом Δ (скажем, $\Delta = 0{,}01$): A, $A + \Delta$, $A + 2\Delta$, … , B. Удобно это сделать так:

записать в первую ячейку столбца число A, записать во вторую ячейку столбца число $A + \Delta$, выделить эти две ячейки и «протащить» вторую ячейку вниз до значения B.

2) Во втором столбце в первую ячейку ввести формулу, задающую функцию. При этом аргументом функции должен служить адрес A1 первой ячейки первого столбца. Для быстрого «протаскивания» формулы можно дважды щёлкнуть левой клавишей мыши по чёрному квадратику в правом нижнем углу первой ячейки.

3) Построить для выделенного диапазона диаграмму «График» (см. вкладку «Вставка»).

4) Чтобы задать значения аргумента на горизонтальной оси, надо щёлкнуть правой клавишей мыши по диаграмме; выбрать в контекстном меню пункт «Выбрать данные…»; нажать кнопку «Изменить», находящуюся под надписью «Подписи горизонтальной оси (категории)»; щёлкнуть левой клавишей мыши по заголовку столбца A (содержащего значения аргумента функции); дважды нажать кнопку «OK».

Например, для функции $y = x^2 - 4x + 5$, задаваемой в Excel формулой «=A1^2 - 4*A1 + 5», в результате выполнения шагов 1 – 4 получится график на отрезке [0, 5], представляющей собой часть параболы (рис. 2).

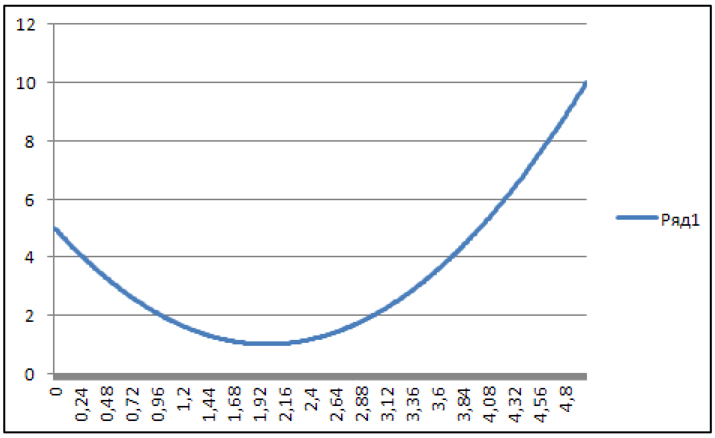

Рис. 2

Упражнение. Постройте на отрезке [0, 1/10] график функции $y = x\sin(1/x)$ (возьмите $\Delta = 0{,}0001$). Ответ приведён в конце темы на рис. 5.

1.3. Обратная функция и её график

Если вместо аргумента x в функцию $f(x)$ подставить некоторую функцию $g(x)$, то получим функцию $f(g(x))$, называемую *сложной функцией* или *суперпозицией функций g* и *f*.

Обратной для функции $g(x)$ называется функция, обозначаемая через $g^{-1}(x)$, которая удовлетворяет соотношению

$$g^{-1}(g(x)) = x.$$

Для любой строго возрастающей (или строго убывающей) функции $g(x)$ существует обратная функция $g^{-1}(x)$. Например, для функции $y = x^3$ обратной функций служит $y = x^{1/3}$.

Как получить формулу обратной функции, если сама функция задана формулой $y = f(x)$?

Процедура такова:

а) выражаем переменную x через переменную y;

б) в полученной формуле меняем местами переменные x и y.

Например, пусть функция задана формулой $y = 1/x - 1$. Тогда

а) выразим x через y: $x = 1 / (y + 1)$;
б) поменяв переменные x и y местами, получим искомую формулу для обратной функции: $y = 1 / (x + 1)$.

Упражнение. Найдите формулу обратной функции для $y = 1 / (1 + x^{1/3})$.

Нетрудно убедиться, что график обратной функции получается из графика функции симметричным отражением последнего относительно прямой $y = x$. Действительно, точка с координатами $(x,\ g(x))$ при таком отражении переходит в точку с координатами $(g(x),\ x)$, которая находится на графике обратной функции $g^{-1}(x)$, поскольку $g^{-1}(g(x)) = x$ (рис. 3).

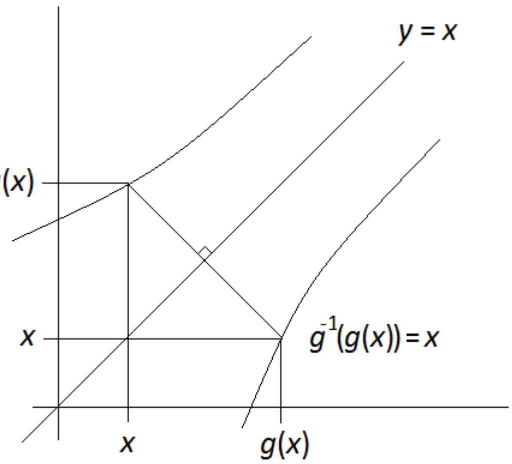

Рис. 3

1.4. Линейная интерполяция

Иногда функция бывает задана не формулой, а таблицей, состоящей из пар $(x_i,\ y_i)$, где x_i — некоторое значение аргумента, y_i — значение функции, соответствующее x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Как правило, в таблице значения аргумента x_i упорядочены по возрастанию.

Как узнать (приближённо) значение функции y в некоторой точке x, где $x_i < x < x_{i+1}$?

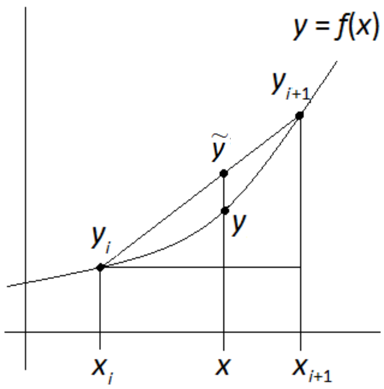

Рис. 4

Заменим на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$ неизвестную функцию $y = f(x)$ на линейную, проходящую через точки с координатами $(x_i,\ y_i)$ и $(x_{i+1},\ y_{i+1})$ (рис. 4). Обозначим через $\tilde{y}$ значение этой линейной функции в точке x. Если длина отрезка $[x_i,\ x_{i+1}]$ мала, то $\tilde{y} \approx y$.

Найдём формулу для вычисления величины $\tilde{y}$. Из подобия прямоугольных треугольников на рис. 4 следует, что

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\tilde{y} - y_i}{x - x_i}.$$

Выразив $\tilde{y}$ через другие величины, получим ***формулу линейной интерполяции***:

$$\tilde{y} = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i).$$

Упражнение. Найдите линейной интерполяцией приближённое значение в точке $x = 3$ функции, заданной следующей таблицей:

x_i	1	2	4	5
y_i	1	0,5	0,25	0,2

1.5. Преобразования графиков функций

Важно уметь строить графики функций, получающихся при линейных преобразованиях функции или её аргумента. Вот список этих преобразований:

1) $g(x) = f(x) + c$, где c — любое число. График функции $g(x)$ получается из графика функции $f(x)$ сдвигом вверх на c.

2) $g(x) = f(x + c)$, где c — любое число. График функции $g(x)$ получается из графика функции $f(x)$ сдвигом влево на c.

3) $g(x) = f(cx)$, где $c > 0$. График функции $g(x)$ получается из графика функции $f(x)$ сжатием к оси Y в c раз (если коэффициент $c < 1$, то получается растяжение, а не сжатие).

4) $g(x) = -f(x)$. График функции $g(x)$ получается из графика функции $f(x)$ отражением относительно оси X, т. е. графики функций $f(x)$ и $g(x)$ симметричны относительно оси X.

5) $g(x) = f(-x)$. График функции $g(x)$ получается из графика функции $f(x)$ отражением относительно оси Y, т. е. графики функций $f(x)$ и $g(x)$ симметричны относительно оси Y.

Упражнение. Постройте график первой функции (по точкам), а затем получите из него график второй функции, используя приведённые выше преобразования:

а) $y = x$, $y = 2x - 4$ (Найдите точки пересечения графика с координатными осями.);

б) $y = x^2$, $y = (x + 1)^2 + 2$ (При каком значении аргумента функция имеет наименьшее значение?);

в) $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x + 3$ (*Указание*. Выделите полный квадрат по формуле $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.);

г) $y = |x|$, $y = 1 - |x|$; $y = |1 - |x||$.

Ответ к упражнению из раздела 1.2

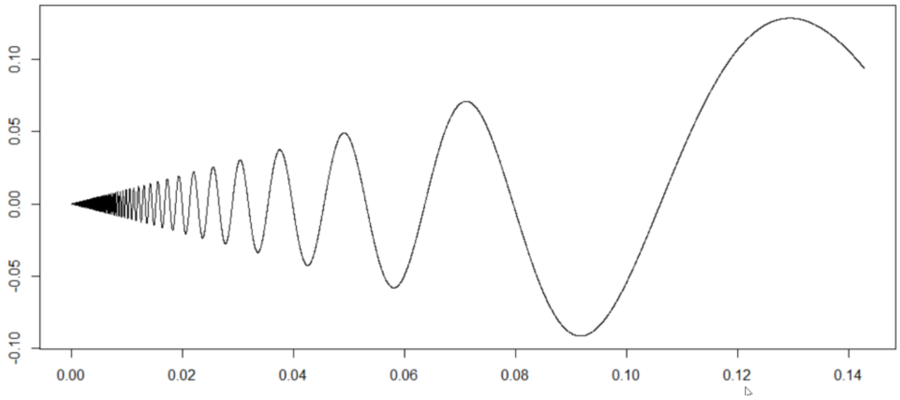

Рис. 5

Упражнение. Чему равны $\sin\pi/2,\ \cos\pi,\ \cos 2\pi$?

Упражнение. Чему равен $\sin\pi/4$? (*Указание*. Примените теорему Пифагора.)

Упражнение. Чему равен $\cos\pi/3$? (Докажите.)

Задачи для самостоятельного решения

То, что вы были вынуждены открыть сами, оставляет в вашем уме дорожку, которой вы можете снова воспользоваться, когда в этом возникнет необходимость.

Г. Лихтенберг

1.1. Построить в Excel график функции $y = x^2 / (x^2 + 1)$ на отрезке [-5, 5] (перерисуйте график на листок бумаги и запишите туда же решения других задач).

1.2. Найти формулу обратной функции для функции $y = (1 - x)^3$.

1.3. Найти линейной интерполяцией приближённое значение в точке $x = 5$ функции, заданной следующей таблицей:

x_i	1	2	3	6
y_i	1	2	8	20

1.4. Построить график функции $y = 1/(1 - x)$, используя преобразования графика функции $y = 1/x$ (изобразите графики, получающиеся при каждом отдельном преобразовании).